ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ ĐỨC HUY

MỘT SỐ DẠNG TOÁN THI HỌC SINH GIỎI VỀ LÝ THUYẾT SỐ BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ ĐỨC HUY

MỘT SỐ DẠNG TOÁN THI HỌC SINH GIỎI VỀ LÝ THUYẾT SỐ BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Cô vẫn dành rất nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn. Có lẽ tôi sẽ không bao giờ hoàn thành được bản luận văn này nếu Cô không tận tình chỉ dạy và luôn tạo cho tôi những điều kiện tốt nhất. Cho đến hôm nay, luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành, xin cảm ơn Cô đã đôn đốc nhắc nhở và đặc biệt giúp đỡ tôi hết mình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Toán - Tin và Phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã không ngừng động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập và thực hiện luận văn.

LỜI NÓI ĐẦU

Luận văn này trình bày lời giải một số dạng toán thi học sinh giỏi liên quan đến tính chia hết và đồng dư thức trong vành số nguyên. Luận văn được viết chủ yếu dựa theo cuốn sách *"Number theory for mathematical contests"* năm 2007 của D. A. Santos. Luận văn cũng tham khảo một số kiến thức cơ sở trong cuốn sách *"An introduction to the theory of numbers"* của Niven-Zuckerman (John Wiley & Sons, Fourth Edition, 2000) và cuốn sách *"Elements of number theory"* của J. Stillwell (Springer, 2003).

Luận văn này được viết theo cách chọn lọc những bài toán hay về tính chia hết và đồng dư thức từ 3 tài liệu tiếng Anh đã nói ở trên, mà không sao chép từ bất cứ tài liệu tiếng Việt có sẵn nào. Vì thế, nội dung của luận văn hoàn toàn không trùng lặp với bất kì một luận văn thạc sĩ đã bảo vệ trước đó về lí thuyết số. Thực tế, một số lời giải bài toán khó được các tác giả của các cuốn sách trên viết khá cô đọng, chúng tôi đã phải cố gắng diễn giải tường minh và chi tiết lời giải trong luận văn này. Nhiều bài toán chỉ được phát biểu trong các cuốn sách đó (mà không có lời giải), chúng tôi cũng đã rất cố gắng tự giải chúng. Nhiều bài toán nằm rải rác trong các cuốn sách trên được chúng tôi bố cục lại theo một chủ đề nhất định để người đọc dễ theo dõi.

Luận văn gồm hai chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày lời giải một số dạng toán thi học sinh giỏi liên quan đến tính chia hết trong vành số nguyên. Chương này gồm 3 mục: Tính chia hết và thuật toán chia; ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất; số nguyên tố. Mỗi mục đều được bố cục thành 3 phần nhỏ: Trong phần đầu của mỗi mục, chúng tôi tóm tắt những khái niệm và kiến thức cơ sở cần thiết (hầu hết những kiến thức này đã được học trong học phần Lí thuyết số ở bậc đại học); Phần tiếp theo đưa ra một số bài tập để minh họa; Phần cuối ở mỗi mục là lời giải một số bài toán khó, trong đó có những bài toán thi học sinh giỏi quốc tế.

Trong Chương 2, chúng tôi đề cập đến những kiến thức mở rộng về đồng dư thức cũng như lời giải một số bài toán khó về đồng dư thức, đặc biệt là các bài toán thi học sinh giỏi quốc tế. Chương này gồm 3 mục: Đồng dư thức; các hệ số nhị thức; cấp của phần tử và các căn nguyên thủy. Mỗi mục cũng được bố cục thành 3 phần nhỏ: Kiến thức chuẩn bị, lời giải một số bài tập minh họa, lời giải một số bài toán khó.

Chương 1

Một số dạng toán về tính chia hết trong vành số nguyên

Trong chương này, chúng tôi trình bày lời giải một số dạng toán thi học sinh giỏi liên quan đến tính chia hết trong vành số nguyên. Chương này gồm 3 mục: Tính chia hết và thuật toán chia; ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất; số nguyên tố.

1.1 Tính chia hết và thuật toán chia

• Kiến thức cơ sở

Trước hết, chúng ta tóm tắt những kiến thức cơ sở cần thiết liên quan đến tính chia hết và thuật toán chia với dư.

1.1.1 Định nghĩa. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$. Ta nói a *chia hết* b (hay a là một *ước* của b) nếu tồn tại một số nguyên c sao cho $b = ac$. Nếu a là một ước của b thì ta viết $a \mid b$. Một số tự nhiên p được gọi là số *nguyên tố* nếu $p > 1$ và p có đúng 2 ước là 1 và p.

Chú ý rằng nếu $a, b > 0$ và $a \mid b$ thì $a \leqslant b$. Thêm nữa, nếu $a \mid b_i$ với $i = 1, \ldots, n$ thì $a \mid \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$ với mọi $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$.

1.1.2 Định lý. *Các phat biểu sau là đúng:*

(i) Thuật toán chia với dư*: Với $a, b \in \mathbb{Z}$, trong đó a là số nguyên dương, tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q, r sao cho $b = aq + r$ và $0 \leqslant r < a$.*

(ii) Định lí cơ bản của số học*: Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được dưới dạng $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_k^{e_k}$ với $p_1, \dots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt và $e_1, \dots, e_k$ là các số nguyên dương, và sự phân tích này là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các nhân tử.*

• Bài tập minh họa

Bây giờ chúng ta vận dụng các kiến thức chuẩn bị ở trên để giải một số bài tập. Lời giải của 3 bài tập đầu tiên chỉ cần dùng những tính chất chia hết đơn giản.

1.1.3 Bài tập. Cho x, y là hai số nguyên. Chứng minh rằng $2x + 3y$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi $9x + 5y$ cũng chia hết cho 17.

Chứng minh. Giả sử $2x + 3y$ chia hết cho 17. Khi đó $13(2x + 3y)$ chia hết cho 17. Do đó $17x + 34y + 9x + 5y$ chia hết cho 17. Suy ra $9x + 5y$ chia hết cho 17. Ngược lại, giả sử $9x + 5y$ chia hết cho 17. Khi đó $4(9x + +5y)$ chia hết cho 17. Do đó $34x + 17y + 2x + 3y$ chia hết cho 17. Suy ra $2x + 3y$ chia hết cho 17. □

1.1.4 Bài tập. Chứng minh rằng tồn tại vô số n để $n^2 + 23$ chia hết cho 24.

Chứng minh. Ta có $n^2 + 23 = (n^2 - 1) + 24 = (n - 1)(n + 1) + 24$. Do đó $n^2 + 23$ chia hết cho 24 khi và chỉ khi $(n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 24. Dễ thấy rằng với mọi $k \in \mathbb{Z}$ và $n = 24k + 1$ hoặc $n = 24k - 1$ thì $(n-1)(n+1)$ chia hết cho 24. Do đó có vô hạn số n để $n^2 + 23$ chia hết cho 24. □

1.1.5 Bài tập. Tìm các số nguyên dương d sao cho tồn tại một số nguyên n để d là ước chung của $n^2 + 1$ và $(n + 1)^2 + 1$.

Lời giải. Giả sử d là một số nguyên dương sao cho tồn tại một số nguyên n để d là ước chung của $n^2 + 1$ và $(n + 1)^2 + 1$. Khi đó d là ước của

$2n+1 = (n+1)^2 + 1 - (n^2+1)$. Suy ra d là ước của

$$4n - 3 = (2n+1)^2 - 4(n^2+1).$$

Do đó d là ước của $5 = 2(2n+1) - (4n-3)$. Vì thế $d = 5$ và $d = 1$. Ngược lại, rõ ràng $d = 1$ thỏa mãn yêu cầu vì 1 là ước chung của n^2+1 và $(n+1)^2+1$ với n tùy ý. $d = 5$ cũng thỏa mãn vì tồn tại $n = 2$ để 5 là ước chung của $5 = n^2+1$ và $10 = (n+1)^2+1$. Vậy, các số cần tìm là $d = 1$ và $d = 5$.

Các bài tập tiếp theo cần đến thuật toán chia với dư.

1.1.6 Bài tập. Chứng minh rằng nếu $p > 3$ là một số nguyên tố thì $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Chứng minh. . Theo thuật toán chia với dư, mỗi số nguyên p có một trong các dạng $p = 6k \pm 1$; $p = 6k \pm 2$; $p = 6k + 3$. Vì p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p lẻ và p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $6k \pm 1$. Vì thế $p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1)$. Nếu k chẵn thì $12k$ luôn chia hết cho 24, còn nếu k lẻ thì $12(3k \pm 1)$ luôn chia hết cho 24. Do đó $p^2 - 1$ chia hết cho 24. □

1.1.7 Bài tập. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a chia hết cho 3 hoặc b chia hết cho 3.

Chứng minh. . Giả sử a và b đồng thời không chia hết cho 3. Theo thuật toán chia với dư, a, b đều có dạng $3k+1$ hoặc $3k-1$. Do đó a^2 và b^2 đều có dạng $3m+1$. Viết $a^2 = 3m+1$ và $b^2 = 3m'+1$ với $m, m' \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a^2 + b^2 = 3(m+n) + 2$, tức là $a^2 + b^2$ không chia hết cho 3. Điều này là vô lí. □

1.1.8 Bài tập. Chứng minh rằng

(i) Nếu n là một số nguyên lẻ thì số dư của phép chia n^2 cho 8 là 1.

(ii) Nếu $n > 2$ là một số nguyên dương và một trong hai số $2^n - 1, 2^n + 1$ là số nguyên tố thì số còn lại là hợp số.

Chứng minh. (i) Viết $n = 2k+1$. Khi đó $n^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$. Chú ý rằng $k(k+1)$ là số chẵn, do đó $4k(k+1)$ chia hết cho 8. Vì thế n^2 chia cho 8 luôn dư 1.

(ii) Ta có

$$2^n = (3-1)^n = 3^n - 3^{n-1} + \ldots + (-1)^k \times C_n^k \times 3^k + \ldots + (-1)^n,$$

trong đó $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ là số tổ hợp chập k của n phần tử. Vì thế 2^n chia cho 3 dư $(-1)^n$. Nếu n chẵn thì $2^n - 1$ chia hết cho 3, và vì $n > 2$ nên $2^n - 1 > 6$. Do đó $2^n - 1$ là hợp số. Nếu n là một số lẻ thì $2^n + 1 \geq 9$ và $2^n + 1$ là bội của 3, do dó $2^n + 1$ là hợp số. $\square$

1.1.9 Bài tập. Hãy chỉ ra rằng trong các số nguyên dương có dạng

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots,$$

không có số nào là bình phương của một số nguyên.

Chứng minh. Giả sử p có dạng trên. Khi đó ta viết $p = 111...11 \times 10^2 + 11$. Do $111...11 \times 10^2$ chia hết cho 4 nên p chia 4 dư 3. Do đó p có dạng $p = 4k+3$ với $k \in \mathbb{N}$. Mặt khác, giả sử $n = t^2$ là bình phương của một số nguyên. Theo thuật toán chia với dư, $t = 4m + r$ với $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Khi đó $n = t^2 = 4m^2 + 8mr + r^2$, với $r^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$. Do đó n có dạng $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$. Vì thế $p = 4k + 3$ không thể là bình phương của một số nguyên. $\square$

• Một số bài toán khó

Chúng ta vận dụng các kiến thức về tính chia hết trong vành số nguyên để trình bày lời giải cho một số bài toán khó, đặc biệt là những bài toán thi học sinh giỏi quốc tế.

Lời giải bài tập sau đây cần đến Định lí cơ bản của số học.

1.1.10 Bài tập. Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho $a|b^2$, $b^2|a^3$, $a^3|b^4$, $b^4|a^5$, $\ldots$. Chứng minh rằng $a = b$.