ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO TUẤN ANH

HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU CÁC TẬP HỢP VỚI ĐIỀU KIỆN CM* VÀ IM*

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO TUẤN ANH

HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU CÁC TẬP HỢP VỚI ĐIỀU KIỆN CM* VÀ IM*

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Trần Phương

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo sự trung thực và chính xác, tuân thủ các qui định về quyền sở hữu trí tuệ.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Tác giả

Đào Tuấn Anh

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **PGS.TS Hà Trần Phương**, người đã tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành khóa luận này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Đại học Thái Nguyên đã dạy bảo tôi tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể trường THPT 19-5, Kim Bôi, Hoà Bình cùng gia đình, bạn bè những người đã giúp đỡ và chia sẻ với tác giả trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Đào Tuấn Anh

Mục lục

Mở đầu

Năm 1929, R. Nevanlinna chứng minh hai định lí nổi tiếng về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình, thường được gọi là Định lý năm điểm và Định lý bốn điểm. Về sau có rất nhiều nhà toán học đã mở rộng những kết quả của Nevanlinna cho những trường hợp khác nhau: hàm phân hình chung nhau các tập điểm, kể cả bội, không kể bội,....

Cho f, g là các hàm phân hình, ta nói f và g *chung nhau một giá trị a CM (hoặc IM)* nếu $f - a$, $g - a$ có cùng không điểm kể cả bội (hoặc không kể bội)[1]. Nếu $1/f$ và $1/g$ chung nhau giá trị 0 CM (IM) thì ta nói rằng f và g chung nhau giá trị ∞ CM (IM). Hiển nhiên, hai hàm f và g chung nhau giá trị a CM thì cũng chung nhau giá trị a IM.Định lý năm điểm cho thấy nếu f và g chung nhau ảnh ngược của năm giá trị phân biệt thì đồng nhất bằng nhau. Nếu hai hàm phân hình chung nhau bốn điểm kể cả bội thì chúng là phép biến đổi Mobius của nhau là nội dung chính của định lý bốn điểm.

Gần đây, P. Li và C. C. Yang đã giới thiệu khái niệm các hàm chung nhau nhau hàm nhỏ CM*, IM* là các điều kiện "nhẹ" CM và IM tương ứng và các tác giả viết lại trong cuốn sách **Unicity of Meromorphic Mappings** ([4]). Cũng trong ([4]), các tác giả nghiên cứu lại định lý năm điểm và định lý bốn điểm dưới điều kiện IM*, CM* và thấy rằng các định lý này vẫn còn đúng dưới điều kiện IM* và CM* tương ứng. Trong thời gian gần đây cũng có một số tác giả giới thiệu các công trình về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình chung nhau các giá trị, hàm nhỏ hoặc các cặp hàm nhỏ CM*,

[1]CM là viết tắt của *counting multiplicities* nghĩa là kể cả bội, IM là viết tắt của *ignoring multiplicities* nghĩa là không kể bội.

IM*.

Với mong muốn tìm hiểu về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình chung nhau các giá trị, hàm nhỏ hoặc các cặp hàm nhỏ CM*, IM*, chúng tôi chọn đề tài **"Hàm phân hình chung nhau các tập hợp với điều kiện CM* và IM*"**. Mục đích chính của luận văn giới thiệu một số kết quả về định lý 4 điểm và các mở rộng của định lý này trong các trường hợp các hàm phân hình chung nhau các giá trị hay các hàm nhỏ với điều kiện IM*, CM* được P. Li và C. C. Yang trình bày trong ([4]). Chứng minh một số kết quả về quan hệ biến đổi Mobius của hai hàm phân hình khi chúng chung nhau các cặp hàm nhỏ với điều kiện IM*, CM* được P. Li và C. C. Yang trình bày trong ([13]).

Luận văn chia thành hai chương:

Chương 1: Giới thiệu về một số kiến thức cơ bản sử dụng trong luận văn và giới thiệu khái niệm các hàm phân hình chung nhau các giá trị, các hàm nhỏ và các cặp hàm nhỏ với điều kiện IM*, CM*.

Chương 2: Chứng minh định lý 4 điểm và các mở rộng của định lý này trong các trường hợp các hàm phân hình chung nhau các giá trị hay các hàm nhỏ với điều kiện IM*, CM* và chứng minh một số kết quả về quan hệ biến đổi Mobius của hai hàm phân hình khi chúng chung nhau các cặp hàm nhỏ với điều kiện IM*.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác Giả

Đào Tuấn Anh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Phân bố giá trị cho các hàm phân hình

1.1.1. Công thức Poison-Jensen

Định nghĩa 1.1. Cho hàm chỉnh hình f trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm z_0 được gọi là không điểm bội k của f nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận U của z_0 sao cho trong lân cận đó hàm f được biểu diễn dưới dạng:

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ và $f^k(z_0) \neq 0$. Với $z \in \mathbb{C}$, ta kí hiệu:

$$\operatorname{ord}_f(z_0) = \begin{cases} k & \text{nếu } z_0 \text{ là không điểm bội } k \text{ của } f; \\ 0 & \text{nếu } f(z_0) \neq 0. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.2. Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, khi đó $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, trong đó f_1, f_2 là các hàm chỉnh hình. Một điểm z_0 gọi là không điểm bội k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_1, z_0 gọi là cực điểm bội k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_2.

Trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, ta kí hiệu

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\};$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\};$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

tương ứng là hình tròn mở, hình tròn đóng và đường tròn tâm z_0, bán kính r. Với $z_0 = 0$, ta kí hiệu ngắn gọn

$$\overline{D}_R = \overline{D}(0, R); \qquad D_R = D(0, R).$$

Định lý 1.1 (Công thức Poison-Jensen)**.** *Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong đĩa đóng $\overline{D}_R, 0 < R < \infty$. Giả sử $a_1, \ldots, a_p$ là các không điểm của f trong $\overline{D}_R$, kể cả bội, $b_1, \ldots, b_p$ là các cực điểm của f trong $\overline{D}_R$, cũng kể cả bội. Khi đó với mỗi z trong $\{|z| < R\}$ không phải là không điểm hay cực điểm của f, ta có*

$$\begin{aligned}\log|f(z)| =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \log|f(Re^{i\varphi})| d\varphi \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_i z}{R(z - a_i)}\right| - \sum_{j=1}^{q} \log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_j z}{R(z - b_j)}\right|.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Hệ quả 1.1. *Với $|z| < R$, ta có*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{|R^2 e^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{R^2 - |z|^2}.$$

Cho $z_0 \in D_R$. Nếu $f(z) = c(z - z_0)^m + \ldots$, trong đó c là hằng số khác không nhỏ nhất, khi đó m được gọi là bậc của f tại z_0 và kí hiệu là $\mathrm{ord}_{z_0} f$.

Hệ quả 1.2. *Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong đĩa đóng $\overline{D}_R, 0 < R < \infty$. Giả sử $a_1, \ldots, a_p$ là các không điểm của f trong $\overline{D}_R - \{0\}$, kể cả bội, $b_1, \ldots, b_p$ là các cực điểm của f trong $\overline{D}_R - \{0\}$, cũng kể cả bội. Khi đó*

$$\begin{aligned}\log|c_f| =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta - \sum_{i=1}^{p} \log\left|\frac{R}{a_i}\right| + \sum_{j=1}^{q} \log\left|\frac{R}{b_j}\right| \\ &- (ord_0 f) \log R,\end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó $f(z) = c_f z^{\mathrm{ord}_0 f} + \ldots, \mathrm{ord}_0 f \in \mathbb{Z}, c_f$ là hằng số khác không nhỏ nhất trong khai triển Laurent của f tại 0.

1.1.2. Các hàm Nevanlinna và tính chất

Với mỗi số thực $x > 0$, kí hiệu:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Khi đó $\log x = \log^+ x - \log^+(1/x)$.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng của một hàm phân hình. Cho f là một hàm phân hình trên $\overline{D}_R$ và một số thực $r > 0$, trong đó $0 < R \leq \infty, r < R$. Dễ thấy:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Định nghĩa 1.3. Hàm

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

được gọi là hàm xấp xỉ của hàm f.

Kí hiệu $n(r,1/f)$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r,1/f)$ là số không điểm không kể bội của f, $n(r,f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r,f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\overline{D}_r$, $n_k(r,f)$ là số cực điểm bội cắt cụt bởi k của f (tức là cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r,f)$ trong $\overline{D}_r$.

Định nghĩa 1.4. Hàm

$$N(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\log r$$

được gọi là hàm đếm kể cả bội của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm). Hàm

$$\overline{N}(r,f) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}(t,f) - \overline{n}(0,f)}{t} dt + \overline{n}(0,f)\log r$$

được gọi là hàm đếm không kể bội. Hàm

$$N_k(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n_k(r,f) - n_k(0,f)}{t} + n_k(0,f)\log r$$