ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

LƯU NGỌC HOÀN

SỐ RAMSEY

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

LƯU NGỌC HOÀN

SỐ RAMSEY

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS ĐÀM VĂN NHỈ

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Lời nói đầu

Bài toán sử dụng k màu để tô dãy số nguyên dương từ 1 đến n với n đủ lớn đạt được dãy số cùng màu $u_1, u_2, \ldots, u_r$ thỏa mãn $u_r = \sum_{i=1}^{r-1} u_i$ đã được I. Schur chứng minh vào năm 1916. Kết quả ấy được coi như viên gạch đầu tiên để dẫn đến định lý tổng quát được Frank Ramsey (1902-1930) chứng minh vào năm 1928. Kết quả của F. Ramsey với nhiều dạng mở rộng đã được ứng dụng không chỉ trong tổ hợp, đồ thị mà còn trong nhiều lĩnh vực khác chẳng hạn như Đại số, Hình học, Lý thuyết tập hợp,v.v... Vậy, bài toán đặt ra bởi F. Ramsey là gì?

Ramsey xét bài toán chia tập hợp các cạnh của một đồ thị đầy đủ vào hai ngăn kéo bằng cách tô màu tất cả các cạnh đồ thị bởi hai màu đen và trắng. Ông khẳng định rằng, với mỗi cặp số nguyên dương p và q luôn tồn tại một số nguyên dương n sao cho với mọi cách tô các cạnh của đồ thị đầy đủ K_n bởi hai màu nói trên hoặc ta sẽ được một đồ thị đầy đủ K_p màu đen hoặc một đồ thị K_q màu trắng. Số nguyên nhỏ nhất n ở đây thường được ký hiệu bởi $R(p, q)$ hoặc $N(p, q)$. Chỉ trong những trường hợp đặc biệt hoặc giá trị nhỏ của số p, q ta có thể xác định chính xác giá trị $N(p, q)$. Trong phần lớn các trường hợp khác ta chỉ có thể đưa ra cận trên hoặc cận dưới của $N(p, q)$ mà thôi.

Vấn đề tìm hiểu số Ramsey và vận dụng chúng trong công việc giảng dạy, dạy học sinh chuyên toán và tự đào tạo là cần thiết. Do vậy, chúng tôi đã tập trung nghiên cứu lý thuyết đồ thị, nguyên lý Dirichlet và lý thuyết Ramsey trong luận văn của mình.

Luận văn được chia ra làm 2 chương.

Chương 1 tập trung trình bày về lý thuyết đồ thị gồm 3 mục. Mục 1.1 tập trung trình bày những khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị. Mục 1.2 được dành để trình bày về những đồ thị hay tính chất đặc biệt như Đồ thị Euler, Đồ thị Hamilton. Mục 1.3 được dành để giới thiệu bài toán tô màu như: tô màu đỉnh, tô màu cạnh, tô màu đồ thị phẳng.

Chương 2 tập trung trình bày về nguyên lý Dirichlet và lý thuyết Ramsey gồm 3 mục. Mục 2.1 tập trung trình bày nguyên lý Dirichlet và một vài ví dụ áp dụng. Đây là kỹ thuật để chứng minh một vài kết quả trong lý thuyết Ramsey. Mục 2.2 được dành để trình bày lý thuyết Ramsey. Chúng tôi cũng đã chứng minh một vài số chặn trên hoặc chặn dưới của số $N(p, q)$. Mục 2.3 được dành để giới thiệu một vài mở rộng và xét bài toán Ramsey trong hình học.

Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn chân thành đến người thầy, người hướng dẫn khoa học PGS. TS. Đàm Văn Nhỉ về sự giúp đỡ chu đáo, chỉ bảo tận tâm của thầy trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành bản luận văn, tác giả đã nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các thầy, cô giáo, cán bộ nhân viên của Phòng đào tạo sau đại học và quan hệ quốc tế trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tác giả Kỷ yếu hội thảo khoa học các chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi khu vực duyên hải Nam Trung bộ và Tây nguyên và Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán tổ hợp - rời rạc nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.

Thái Nguyên ngày 15 tháng 04 năm 2015

Lưu Ngọc Hoàn

Chương 1

Lý thyết đồ thị

1.1 Các khái niệm cơ bản

Lý thuyết đồ thị là một ngành khoa học đã được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ IIXX bởi nhà toán học Leonhard Euler, người Thụy sĩ. Ông là người đã sử dụng đồ thị để giải quyết nhiều bài toán nổi tiếng.

Đồ thị, hoặc Graph, là một cấu trúc rời rạc gồm các *đỉnh* và các *cạnh* nối các đỉnh đó. Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị. Nhiều bài toán thuộc lĩnh vực rất khác nhau có thể giải quyết được qua đồ thị. Chẳng hạn, có thể dùng đồ thị để biểu diễn sự cạnh tranh của các loài trong một môi trường sinh thái, để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, để biểu diễn các kết cục của cuộc thi đấu thể thao; cũng có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không hoặc tìm số các màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ.

1.1.1 Đồ thị có hướng-Đồ thị vô hướng

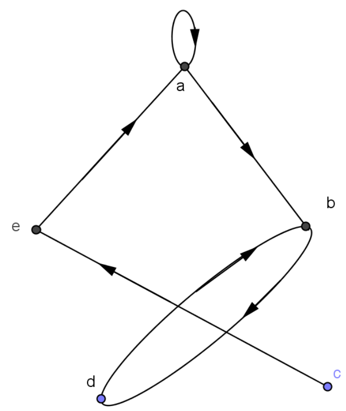
Chúng ta bắt đầu lý thuyết đồ thị bằng một số khái niệm cơ bản sau:

Định nghĩa 1.1.1. Một *đồ thị có hướng* G, (digraph), là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, trong đó V là một tập và E là một tập con của tích Carte $V \times V$, tức là E là một quan hệ hai ngôi trên V. Các phần tử thuộc V được gọi là các *đỉnh,* còn các phần tử thuộc E được gọi là các *cung* của đồ thị có hướng G.

Nếu $(a, b) \in E$ thì (a, b) còn được gọi là một *cung* của G với đỉnh đầu là a, đỉnh cuối b và hướng đi từ a tới b. Để có hình ảnh trực quan, người ta thường biểu diễn đồ thị có hướng G trên mặt phẳng như sau: Các đỉnh của G được biểu diễn bằng các vòng tròn nhỏ, còn các cung thì được biểu diễn bằng các đường cong nối đỉnh đầu với đỉnh cuối và có mũi tên hướng từ đỉnh đầu tới đỉnh cuối.

Ví dụ 1.1.2. *Cho đồ thị* $G = (V, E)$ *với* $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ *và* $E = \{(a, a), (a, b), (b, d), (d, b), (e, a)\}$. *Khi đó* G *là một đồ thị có hướng.*

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Nếu $(a, b) \in E$ thì ta nói các đỉnh a và b là *liên thuộc* với cung (a, b). Khi đó a và b cũng được gọi là kề nhau. Hai cung bất kỳ của G được gọi là *kề nhau* nếu chúng có đỉnh chung. Cùng dạng (a, a) với $a \in V$ được gọi là *khuyên.* Đỉnh không liên thuộc với một cung nào được gọi là *đỉnh độc lập* của G; Số các đỉnh của G, tức là $|V|$, được gọi là *cấp* của G. Số các cung của G, tức là $|E|$, được gọi là *cỡ* của G.



Hình 1.1: Ví dụ một đồ thị có hướng.

Định nghĩa 1.1.3. Một *đồ thị vô hướng* G là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, trong đó V là một tập và E là tập với các phần tử là các đa tập lực lượng 2 trên V. Các phần tử thuộc V cũng được gọi là các *đỉnh,* còn các phần tử thuộc E được gọi là các *cạnh* của đồ thị vô hướng G. Nếu $e = \{a, b\}$ là một cạnh của G thì a và b được gọi là các *đỉnh đầu mút* của cạnh e hay các đỉnh liên thuộc với e. Đôi khi ta thường ký hiệu cạnh $\{a, b\}$ ngắn gọn là ab.

Người ta cũng thường biểu diễn đồ thị vô hướng trên mặt phẳng tương tự như ta biểu diễn đồ thị có hướng: các đỉnh của đồ thị được biểu diễn bằng các vòng tròn nhỏ và các cạnh thì được biểu diễn bằng một đường cong nối các đỉnh của cạnh. Điểm khác biệt ở đây là không có mũi tên chỉ hướng trên các đường cong đó.

Ví dụ 1.1.4. *Cho đồ thị* $G = (V, E)$ *với* $V = \{a, b, c, d\}$ *và* $E = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, d)\}$. *Khi đó* G *là một đồ thị vô hướng và*