ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ TRỌNG THIẾT

# ĐỊNH LÝ MASON SUY RỘNG ĐỐI VỚI ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ TRỌNG THIẾT

# ĐỊNH LÝ MASON SUY RỘNG ĐỐI VỚI ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

**Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
**Mã số: 60460113**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học:**
**TS. VŨ HOÀI AN**

**Thái Nguyên - Năm 2015**

# Mục lục

# Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Hoài An. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người thầy của mình.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo trong Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, tạo điều kiện, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

*Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015*

*Tác giả*

*Ngô Trọng Thiết*

# Bảng ký hiệu

| | |
|---|---|
| $f$ | Hàm hữu tỷ |
| $n(f, a)$ | Hàm đếm của $f$ tại điểm $a$ |
| $T(f)$ | Hàm độ cao của $f$ |
| $\mathbb{K}$ | Trường đóng đại số, đặc số không |
| $\mathbb{R}$ | Trường số thực |

# Mở đầu

**1. Lý do chọn đề tài**

Trong [5], "Hà Huy Khoái - Phạm Huy Điển, *Số học Thuật toán Cơ sở lý thuyết và Tính toán thực hành*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003", đã đề cập đến Định lý Mason đối với đa thức trên trường số phức:

**Định lí A**. Giả sử $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ là các đa thức với hệ số phức, nguyên tố cùng nhau từng cặp và thỏa mãn hệ thức $a(t) + b(t) = c(t)$. Khi đó, nếu ký hiệu $n_0(f)$ số nghiệm phân biệt của một đa thức $f$ thì ta có

$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leq n_0(abc) - 1.$$

Dưới góc độ của lý thuyết phân bố giá trị p-adic, là hệ quả của hai Định lý nhận giá trị đối với hàm hữu tỷ với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không. Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không đã đưa ra trong [1] "Vũ Hoài An, *Tương tự của định lý Mason suy rộng cho đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không*, bản thảo", và được trình bày trong [3] "Vũ Thị Thùy Dung, *Vấn đề nhận giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không và áp dụng*, Luận văn thạc sỹ toán học, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, 2014". Năm 2002 trong [8] "Hu, P.C. and Yang, C.C, *A Generalized abc - Conjeture over Function Fields*, Journal of Number Theory 94, 268 - 298, 2002" đã đưa ra một tổng quát của Định lý Mason đối với hàm nguyên p-adic sau đây:

**Định lý B**. Cho $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không, đầy đủ đối với chuẩn không Archimedean. Cho $f_j\,(j = 1, ..., k+1)$ là các hàm nguyên trên $\mathbb{K}$ sao cho $f_j$, $f_1$ không có không điểm chung, $j = 2, ..., k+1$; $f_j\,(j = 1, ..., k+1)$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{K}$ và $f_2 + ... + f_{k+1} = f_1$. Khi đó

$$\max_{1\leq j\leq k+1}\{T(r, f_j)\} \leq \sum_{i=1}^{k+1} N_{k-1}\left(r, \frac{1}{f_i}\right) - \frac{k(k-1)}{2}\log \mathrm{r} + O$$

Phương pháp chứng minh **Định lý B** là thiết lập hàm $g$, $g$ là thương của Wronskian và $f_2...f_{k+1}$. Đánh giá môđun của hàm $g$, sử dụng Bổ đề đạo hàm loga của lý thuyết phân bố giá trị p-adic.

Dưới góc độ của lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình p-adic, công việc xét **Định lý B** và tương tự của nó đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không đã được đề cập trong [1] "Vũ Hoài An, *Tương tự của định lý Mason suy rộng cho đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không*, bản thảo". Mặt khác, Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không sẽ có ứng dụng trong toán học phổ thông. Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi xem xét vấn đề:

***Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không và ứng dụng.***

**2. Mục đích, nhiệm vụ và phương pháp nghiên cứu**

Tổng hợp, trình bày lại các bài giảng trong [1] về Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không. Các kết quả của công việc này có tựa đề là Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không.

Đưa ra các ví dụ trong toán học phổ thông thể hiện sự tương tự của Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không với số nguyên.

**3. Nội dung nghiên cứu**

Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không được trình bày ở Chương 1. Kết quả chính là Định lý 1.2.2, Định lý 1.2.3. Định lý 1.2.2 là Định lý Mason trên $\mathbb{C}$, Định lý 1.2.3 là Định lý Mason trên $\mathbb{K}$. Chúng tôi trình bày lại hai cách chứng minh: Một cách được giới thiệu trong [5], một cách được đề cập trong [1] và trình bày lại trong [3].

Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không và ứng dụng được trình bày ở Chương 2. Hai kết quả chính ở đây là Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.2. Đây là hai dạng của Định lý Mason suy rộng. Ngoài ra, luận văn đưa ra các ví dụ thể hiện ứng dụng của Định lý Mason với số nguyên. Ý tưởng của sự ứng dụng này là như sau:

Phương trình Fermat đối với đa thức trên $\mathbb{K}$ là một ứng dụng thú vị của Định lý Mason. Từ đây dẫn đến việc xét phương trình Fermat trên trường có đặc số khác không. Từ đó tạo ra được nhiều bài toán về chia hết đối với số nguyên.

**4. Cấu trúc của luận văn**

Luận văn này gồm các phần như sau.

*Chương 1: Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không.*

Kết quả chính được trình bày lại ở Chương 1 là Định lý 1.2.2 (Định lý Mason trên $\mathbb{C}$) và Định lý 1.2.3 (Định lý Mason trên $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không).

*Chương 2: Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không và ứng dụng.*

Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.2 là hai dạng của Định lý Mason suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày các ví dụ là ứng dụng của Định lý Mason trong toán học phổ thông.

# Chương 1

# Định lý Mason đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không

Mục tiêu thứ nhất của Chương 1 là trình bày Định lý Mason theo hai cách:

Một là, dùng đạo hàm để xét mối quan hệ giữa số nghiệm của đa thức với bậc của nó; từ đó nhận được Định lý Mason.

Hai là, dùng hai kiểu định lý chính đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không để đưa ra mối quan hệ giữa bậc của hàm và hàm đếm không tính bội; từ đó nhận được Định lý Mason như một hệ quả.

Mục tiêu thứ hai của Chương 1 là: Xác định cách tiếp cận thứ hai trên đây, cho phép mở rộng Định lý Mason cho n đa thức thỏa mãn điều kiện nào đó.

Để thực hiện hai mục tiêu này, trước tiên chúng ta trình bày vấn đề nhận giá trị đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không đã đề cập trong [1] và trình bày ở [3].

## 1.1 Vấn đề nhận giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.

**Định nghĩa 1.1.1.** Một trường $\mathbb{K}$ được gọi là đóng đại số nếu mọi đa thức một ẩn có bậc dương với hệ số trong $\mathbb{K}$ đều có nghiệm trong $\mathbb{K}$.

Trường số phức $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số.

Trường $\mathbb{Q}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = x^{10} + 2$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$ mặc dù các hệ số của đa thức đều thuộc $\mathbb{Q}$.

Trường $\mathbb{R}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = \sqrt{5}x^2 + 11$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$ mặc dù các hệ số của đa thức đều thuộc $\mathbb{R}$.

Tiếp theo, ta định nghĩa khái niệm đặc số của trường.

**Định nghĩa 1.1.2.** Số 0 được gọi là đặc số của trường $\mathbb{K}$ nếu $n1 \neq 0$ với mọi số tự nhiên $n$ khác không. Khi đó ta gọi $\mathbb{K}$ là trường có đặc số không. Nếu có một số tự nhiên $n$ khác không sao cho $n1 = 0$ thì số nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này được gọi là đặc số của trường $\mathbb{K}$, ký hiệu là *char(*$\mathbb{K}$*)*.

Ví dụ, trường $\mathbb{R}$ có đặc số 0, trường $\mathbb{Z}_{13}$ có đặc số 13 vì $\overline{13} \equiv \overline{0}$ và 13 là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này.

Nếu $char(\mathbb{K}) = n > 0$ thì $nx = 0$ với mọi $x \in \mathbb{K}$ vì $nx = n(1x) = (n1)x = 0x$.

Từ đây trở đi, ta luôn ký hiệu $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không.

Giả sử $f$ là đa thức khác hằng có bậc $n$ trên $\mathbb{K}$ và $a$ là không điểm của $f$. Khi đó viết

$$f = (z - a)^m p\,(z)$$

với $p\,(a) \neq 0$. Ta gọi $m$ là bội của không điểm $a$ của $f$. Giả sử $d \in \mathbb{K}$ và $l$ là số nguyên dương, ta ký hiệu:

$n\,(f)$ là số các không điểm của $f$ tính của bội;
$n(f, d) = n(f - d)$;
$n_l(f) = \sum_{i=1}^{q} min\{m_i, l\}$; ở đó $f = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_q)^{m_q}$
$n_l(f, d) = n_l(f - d)$;
$n_0(f) = q$; $n_0(f, d) = n_0(f - d)$.

Giả sử $f = \frac{f_1}{f_2}$ là hàm hữu tỷ trên $\mathbb{K}$, ở đó $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x]$ và không có không điểm chung, $d \in \mathbb{K}$, ta ký hiệu:

$n(f) = n(f_1); n(f, d) = n(f_1 - df_2)$;
$n_1(f) = n_1(f1); n_1(f, d) = n_1(f_1 - df_2)$;
$n_0(f, d) = n_0(f_1 - df_2); n(f, \infty) = n(f_2)$;
$n_1(f, \infty) = n_1(f_2); n_0(f, \infty) = n_0(f_2)$;
$degf = degf_1 - degf_2$; $T\,(f) = \max\{\deg f_1, \deg f_2\}$.