ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ ÁNH HẰNG

VỀ LINH HÓA TỬ CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ ÁNH HẰNG

VỀ LINH HÓA TỬ CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. PHẠM HÙNG QUÝ

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

MỞ ĐẦU

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được giới thiệu đầu tiên bởi A. Grothendieck vào những năm 1960, sau đó được quan tâm nghiên cứu bởi rất nhiều nhà toán học trên thế giới như R. Hartshorne, M. Brodmann, J. Rotman, C. Huneke... Lý thuyết đối đồng điều địa phương đã có những ứng dụng to lớn trong nhiều lĩnh vực của toán học. Ngày nay nó trở thành công cụ không thể thiếu trong Đại số giao hoán, Hình học Giải tích, Hình học Đại số ...Trong nhiều ứng dụng của môđun đối đồng điều địa phương, các kết quả về linh hóa tử của các môđun này là chìa khóa cho việc chứng minh (xem [1], [3], [8], ...).

Năm 2014 trong một bài báo đăng trên tạp chí Arch Math (xem [1]) các tác giả A. Atazadeh, M. Sedghi và R. Naghipour đã trình bày một kết quả nghiên cứu về linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá bất kì trên một vành giao hoán Noether. Kết quả này là mở rộng của kết quả của L.R. Lynch năm 2012 (xem [12]). Mục đích chính thứ nhất của luận văn là trình bày lại kết quả trên một cách chi tiết.

Đối với các môđun đối đồng điều địa phương cấp bất kì, năm 2012 trong bài báo đăng trên tạp chí J. Algebra (xem [3]), các tác giả K. Bahmanpour, J. A'zami and G. Ghasemi đã đưa ra một công thức tính căn của linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp bất kì với giá cực đại trên vành đầy đủ. Mục đích chính thứ hai của luận văn là mở rộng kết quả trên đồng thời nghiên cứu dưới giả thiết yếu hơn của vành. Một số ví dụ được đưa ra để chứng tỏ giả thiết của vành trong định lý chính là không thể bỏ đi được. Nghiên cứu linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương chuyển qua địa phương hóa và đầy đủ hóa là mục đích chính tiếp theo của luận văn. Chúng tôi đã đạt được một số kết quả trong trường hợp vành đặc biệt. Các kết quả mới này được chúng tôi trình bày trong bài báo (xem [16]).

Luận văn được bố cục làm 2 chương. Chương 1, trước khi trình bày kết quả chính về linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá bất kỳ và trên một vành giao hoán, Noether theo bài báo [1] của các tác giả A. Atazadeh, M. Sedghi và R. Naghipour chúng tôi trình bày một số kết quả về môđun đối đồng điều địa phương, chiều đối đồng điều. Mục thứ nhất và thứ hai của Chương 2 là các kiến thức chuẩn bị về vành catenary, catenary phổ dụng, vành có các thớ hình thức là Cohen-Macaulay, tập giả giá và tính bão hòa nguyên tố của môđun đối đồng điều địa phương. Mục thứ ba và thứ tư là kết quả mới trình bày về linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương liên hệ với tập giả giá và linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương khi chuyển qua địa phương hóa và đầy đủ hóa.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Hùng Quý. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô giáo của tôi PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô đã truyền cảm hứng từ những bài học, những buổi seminar chuyên môn, cô cũng đã đặt ra nhiều vấn đề nghiên cứu cho luận văn và luôn giúp tôi tiếp thu thêm nhiều kiến thức bổ ích.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn người thân, bạn bè đã cổ vũ và động viên tôi để tôi có thể hoàn thành luận văn cũng như khóa học của mình.

Chương 1

Môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất

Trong chương này ta luôn quy ước R là một vành giao hoán có đơn vị, M là R-môđun và $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R.

1.1. Môđun đối đồng điều địa phương

Mục đích của tiết này là nhắc lại khái niệm môđun đối đồng điều địa phương và một số kết quả về tính triệt tiêu, tính Artin của các môđun này. Các thuật ngữ ở đây được tham khảo trong cuốn sách [7] của M. Brodman và R.Y. Sharp.

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathfrak{a}$ là iđêan của R và M, N là các R-môđun. Đặt $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup\limits_{n\geq 0}(0 :_M \mathfrak{a}^n)$. Vì $(0 :_M \mathfrak{a}) \subseteq (0 :_M \mathfrak{a}^2) \subseteq ...$ là dãy tăng các môđun con của M nên $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun con của M. Cho $f : M \longrightarrow N$ là một đồng cấu giữa các R-môđun. Lấy $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, khi đó tồn tại $t \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in (0 :_M \mathfrak{a}^t)$, tức là $\mathfrak{a}^t x = 0$. Vì vậy $0 = f(\mathfrak{a}^t x) = \mathfrak{a}^t f(x)$. Suy ra $f(x) \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Vậy ta có đồng cấu $f^* : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ cho bởi $f^*(x) = f(x)$. Đặt $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = f^*$. Khi đó $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ là một hàm tử hiệp biến, khớp trái từ phạm trù các R-môđun đến chính nó. $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ được gọi là *hàm tử $\mathfrak{a}$-xoắn*.

Môđun dẫn xuất phải thứ i của hàm tử $\mathfrak{a}$-xoắn $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ ứng với M được gọi là môđun đối đồng điều thứ i của M với giá $\mathfrak{a}$, kí hiệu là $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$.

Cụ thể, nếu

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \to \dots.$$

là giải nội xạ của M, tác động hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ ta có đối phức

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(E_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E_1) \xrightarrow{d_1^*} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E_2) \to \dots.$$

Khi đó $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = \operatorname{Ker} d_i^* / \operatorname{Im} d_{i-1}^*$ với $i \geq 0$, môđun này không phụ thuộc vào việc chọn giải nội xạ của M.

Sau đây là một số tính chất cơ sở của môđun đối đồng điều địa phương.

Mệnh đề 1.1.2. *Các phát biểu sau là đúng.*

(i) $H^0_{\mathfrak{a}}(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

(ii)Nếu M là nội xạ thì $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ với mọi $i \geq 1$.

(iii) $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun $\mathfrak{a}$-xoắn với mọi i.

(iv) M là $\mathfrak{a}$-xoắn thì $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ với mọi $i > 0$. Đặc biệt với mỗi R-môđun M, ta có $H^j_{\mathfrak{a}}(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$ với mọi $i \geq 0$ và với mọi $j \geq 1$.

(v) Cho $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ là dãy khớp ngắn các R-môđun. Khi đó với mỗi $i \in \mathbb{N}$, tồn tại một đồng cấu $\delta_i : H^i_{\mathfrak{a}}(M'') \to H^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M')$ sao cho ta có dãy khớp dài

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M') \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M'') \xrightarrow{\delta_0} H^1_{\mathfrak{a}}(M')$$

$$\to H^1_{\mathfrak{a}}(M) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M'') \xrightarrow{\delta_1} H^2_{\mathfrak{a}}(M') \to \dots$$

Đồng cấu δ_i ở trên gọi là đồng cấu nối thứ i.

(vi) Cho $r \in R$. Khi đó nếu $r \in \operatorname{Ann}_R M$ thì $r \in \operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ với mọi i.

Ví dụ 1.1.3. Cho R là một vành, $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R. Với mỗi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R. Ta có $H^j_{\mathfrak{a}}(E_R(R/\mathfrak{p})) = 0$ với mọi $j \geq 1$ và

$$H^0_{\mathfrak{a}}(E_R(R/\mathfrak{p})) = \begin{cases} E_R(R/\mathfrak{p}), & \text{nếu } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}, \\ 0, & \text{nếu } \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Định lý sau được gọi là Định lí chuyển phẳng.

Định lý 1.1.4 ([7],4.3.2)**.** *Cho R, R' là những vành Noether, ánh xạ $f : R \longrightarrow R'$ là một đồng cấu phẳng, gọi $\mathfrak{a}R'$ là iđêan mở rộng của $\mathfrak{a}$ trong R'. Khi đó, với mọi $i \in \mathbb{N}_0$ tồn tại duy nhất đẳng cấu tự nhiên*

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) \otimes_R R' \cong H^i_{\mathfrak{a}R'}(M \otimes_R R'),$$

những R'-môđun.

Nhận xét 1.1.5. (i) Xét S là một tập đóng nhân trong R, do đồng cấu tự nhiên $R \longrightarrow R_S$ là phẳng nên có đẳng cấu R_S-môđun

$$(H^i_{\mathfrak{a}}(M))_S \cong H^i_{\mathfrak{a}R_S}(M_S).$$

(nói ngắn gọn là: *đối đồng điều địa phương giao hoán với địa phương hóa*). Đặc biệt, với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, ta có đẳng cấu $R_{\mathfrak{p}}$-môđun

$$(H^i_{\mathfrak{a}}(M))_{\mathfrak{p}} \cong H^i_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

(ii) Xét $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, gọi $\widehat{R}$ và $\widehat{M}$ lần lượt là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của R và M. Vì $f : (R, \mathfrak{m}) \longrightarrow (\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ là hoàn toàn phẳng nên ta có đẳng cấu những $\widehat{R}$-môđun

$$(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \otimes_R \widehat{R} \cong H^i_{\widehat{\mathfrak{a}}}(\widehat{M}).$$

Hơn nữa, do f còn là hoàn toàn phẳng nên còn có $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ khi và chỉ khi $H^i_{\widehat{\mathfrak{a}}}(\widehat{M}) = 0$ và $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là R-môđun hữu hạn sinh khi và chỉ khi $H^i_{\widehat{\mathfrak{a}}}(\widehat{M})$ là $\widehat{R}-$môđun hữu hạn sinh.

Tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương được thể hiện trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.6 ([7], 7.1.3, 7.1.6)**.** *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, M là hữu hạn sinh chiều d. Khi đó*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là Artin với mọi số nguyên $i \geq 0$.

(ii) $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ là Artin với mọi iđêan $\mathfrak{a}$ của R.

Để biết được thông tin nhiều hơn về môđun đối đồng điều địa phương ta cần biết khái niệm tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất. Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả về biểu diễn thứ cấp của môđun.

Định nghĩa 1.1.7. (i) Một R-môđun N được gọi là *thứ cấp* nếu $N \neq 0$ và với mọi $x \in R$, phép nhân bởi x trên N là toàn cấu hoặc lũy linh. Trong trường hợp này, $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R N)$ là iđêan nguyên tố, chẳng hạn là $\mathfrak{p}$, và ta gọi N là $\mathfrak{p}$-*thứ cấp*.

(ii) Cho N là R-môđun. *Một biểu diễn thứ cấp* của N là một phân tích $N = N_1 + \ldots + N_n$ thành tổng hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp N_i. Nếu $N = 0$ hoặc N có một biểu diễn thứ cấp thì ta nói N là *biểu diễn được*. Biểu diễn thứ cấp này được gọi là *tối thiểu* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử N_i nào là thừa, với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Dễ thấy rằng nếu N_1, N_2 là các môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N thì $N_1 + N_2$ cũng là môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N. Vì thế mọi biểu diễn thứ cấp của N đều có thể đưa được về dạng tối thiểu bằng cách ghép chung những thành phần thứ cấp ứng với cùng một iđêan nguyên tố và bỏ đi những thành phần thừa. Tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn biểu diễn thứ cấp tối thiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố gắn kết* của N, kí hiệu là $\mathrm{Att}_R N$. Các hạng tử $N_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là *các thành phần thứ cấp* của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu trong tập $\mathrm{Att}_R N$ thì $\mathfrak{p}_i$ được gọi là *iđêan nguyên tố gắn kết cô lập* của N và N_i được gọi là *thành phần thứ cấp cô lập* của N.

Ví dụ 1.1.8. *(i) Cho R là miền nguyên. Khi đó trường các thương của R là R-môđun 0-thứ cấp.*

(ii) $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ là các $\mathbb{Z}$-môđun 0-thứ cấp.

(ii) Cho p là một số nguyên tố, n là một số tự nhiên. Ta có $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ là Z-môđun $p\mathbb{Z}$-thứ cấp.

Mệnh đề 1.1.9. *Cho R là vành Noether, N là một R-môđun biểu diễn được. Khi đó các khẳng định sau là đúng.*

(i) *Tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của R chứa $\operatorname{Ann}_R N$ chính là tập các phần tử tối thiểu của $\operatorname{Att}_R N$.*

(ii) $\operatorname{Att}_R N \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi* $N \neq 0$.

Định lý sau đây cho ta một lớp các môđun biểu diễn được.

Định lý 1.1.10. *Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.*

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, A là R-môđun Artin. Khi đó A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun. Với cấu trúc này, một môđun con của A xét như R-môđun khi và chỉ khi nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Do đó A là $\widehat{R}$-môđun Artin và ta có mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết như sau.

Bổ đề 1.1.11 ([7], 11.3.7)**.** *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, A là R-môđun Artin. Khi đó*

$$\operatorname{Att}_R(A) = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R \mid \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(A)\}.$$

Kết quả sau đây, gọi là *tính chất dịch chuyển địa phương yếu.*

Định lý 1.1.12 ([7], 11.3.2)**.** *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Giả sử $M \neq 0$ và $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = t$. Giả sử $i \geqslant 0$ là một số nguyên và $\mathfrak{q}$ là một iđêan nguyên tố của R sao cho $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ và $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}))$. Khi đó $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^{i+t}_{\mathfrak{m}}(M))$.*

Từ Định lý 1.1.12 ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.13. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Giả sử $M \neq 0$ và $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ với $\dim R/\mathfrak{p} = t$. Khi đó $H^t_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ và $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R H^t_{\mathfrak{m}}(M)$.*

Theo Mệnh đề 1.1.6, môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại là Artin, do đó nó có biểu diễn thứ cấp. Tập iđêan nguyên tố gắn kết của $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ được cho bởi công thức sau.