ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM ĐỨC TUẤN

THUẬT TOÁN NÓN XOAY TÌM CHIẾN LƯỢC HỖN HỢP TỐI ƯU TRONG BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60. 46. 01. 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. Nguyễn Anh Tuấn

Thái Nguyên - 2015

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính với các biến không âm. Nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính trên thực tế thường bắt đầu ở dạng này, do vậy luận văn này trình bày phương pháp nón xoay giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính. Từ đó ta xây dựng thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm và ứng dụng nó để tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu trong trò chơi ma trận. Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1, tôi trình bày phương pháp nón xoay và thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán quy hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu có hệ số không âm với cơ sở xuất phát từ gốc tọa độ O(0, 0, …, 0). Sau đó trình bày bài toán trò chơi ma trận và đưa việc tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu của bài toán trò chơi ma trận về việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

Chương 2, luận văn đã ứng dụng thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu có hệ số không âm trình bày trong chương 1, ta đi xây dựng một phương pháp cụ thể giải trực tiếp bài toán tìm chiến lược tối ưu trong trường hợp đặc biệt với số chiến lược của người chơi thứ nhất là 2 (người chơi thứ hai có số chiến lược chơi là n bất kỳ) mà chúng ta vẫn thường giải nó bằng phương pháp đồ thị.

Các thuật toán trình bày trong luận văn này được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các ngôn ngữ như Pascal, C, Java, ...

Luận văn này hoàn thành dựa trên các tài liệu [2], [4], [5], [6] và các tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015

Tác giả

Phạm Đức Tuấn

Chương 1

THUẬT TOÁN NÓN XOAY VÀ BÀI TOÁN TRÒ CHƠI MA TRẬN

Trong chương này, tôi trình bày một phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính thuộc lược đồ xấp xỉ ngoài (vì nó xuất phát giải từ đỉnh của một nón đơn hình tuyến tính ngoài miền chấp nhận được) gọi là thuật toán nón xoay tuyến tính [4]. Từ đó trình bày một trường hợp riêng biến thể của nó giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi hàm mục tiêu có các hệ số không âm, đây là lớp bài toán thường hay gặp trong thực tế. Bài toán trò chơi ma trận trong trường hợp cần tìm chiến lược hỗn hợp tối ưu cũng đã dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn, vì vậy trong chương này cũng sẽ trình bày khái niệm cơ bản về bài toán trò chơi ma trận và đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính sau:

$$(L)\begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i.x_i \to \min \\ x \in P_L := \; x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \le 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, A^i là véc tơ dòng và $A^i \in \mathbb{R}^n$, $m \ge n$, A^i $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \ne O(0,\dots,0)$, $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $b_i \in \mathbb{R}^1$, $i=1, 2, \dots, m$. Hạng của hệ A^i ($i=1, 2, \dots, m$) bằng n, giả thiết này rất bình thường bởi miền ràng buộc P_L của bài toán quy hoạch tuyến tính nói chung bao giờ cũng có ràng buộc về dấu của biến x.

1.2. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính, cạnh và phương của nón và Nón – min (nón cực tiểu)

1.2.1. Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính

Xét tập M được xác định từ n ràng buộc tuyến tính nào đó của P_L, cụ thể là:

$$M := \; x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \le 0, i \in I \qquad (1.1)$$

trong đó $I := \{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset \{1, 2, ..., m\}$, $|I| = n$ (ở đây $|I|$ là số đo hay là số phần tử của tập *I*) và A^i với $i \in I$ là một hệ độc lập tuyến tính. Tập *M* gọi là nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc P_L với đỉnh x^M là nghiệm (được xác định) thoả mãn hệ sau:

$$<A^i, x> + b_i = 0, \forall\ i \in I \qquad (1.2)$$

Hệ véc tơ A^i với $i \in I$ được gọi là cơ sở của nón *M*, hay cũng gọi là cơ sở của đỉnh x^M. Tập *I* gọi là tập chỉ số của cơ sở của nón *M*.

1.2.2. Khái niệm về cạnh của nón đơn hình

Với mỗi i $\in I$, tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn hệ:

$$<A^r, x> + b_r = 0, \forall r \in I \backslash \{i\} \qquad (1.3)$$

gọi là đường thẳng *i* của nón *M*.

Tập các điểm *x* thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} < A^r, x > + b_r = 0, \forall r \in I \setminus \{i\} \\ < A^i, x > + b_i \leq 0 \end{cases}$$

gọi là cạnh *i* của nón M.

Với mỗi *i* $(i \in I)$, Véc tơ z_M^i $(i \in I)$, xác định bởi hệ:

$$\begin{cases} < A^r, z_M^i > = 0, \forall r \in I, r \neq i \\ < A^i, z_M^i > = -1 \end{cases} \qquad (1.4)$$

gọi là véc tơ chỉ phương của cạnh *i* của nón *M*.

Đỉnh x^M của nón *M* có thể xác định từ (1.2), trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương z_M^i $(i \in I)$ thì chúng ta có thể sử dụng công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i . z_M^i \qquad (1.5)$$

Định lý 1.1 [4]

Nếu x^M là đỉnh của nón đơn hình *M* được xác định từ (1.2), và hệ véc tơ chỉ phương z_M^i $(i \in I)$ của cạnh *i* của nón *M* xác định từ (1.4) thì chúng ta có thể xác định đỉnh x^M từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i . z_M^i$$

Từ định lý 1.1 ta suy ra trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương z_M^i $(i \in I)$ thì chúng ta có thể xác định đỉnh x^M từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i . z_M^i$$

Ta ký hiệu:

$$J^+ \ x^M \ := \ j \in \ 1,2,...,m \ :< A^j , x^M > + b_j > 0 \qquad (1.6)$$

Rõ ràng khi $J^+(x^M) = \phi$ thì x^M chính là một điểm chấp nhận của bài toán *(L)*. Chúng ta giả sử $J^+(x^M) \neq \phi$. Với mỗi $s \in J^+(x^M)$, chúng ta ký hiệu như sau:

$$I^s := \ i \in I :< A^s , z_M^i \neq o > \ \subset I := \ i_1, i_2, ..., i_n \qquad (1.7)$$

$$I^0 := \ i \in I < A^s , z_M^i >= 0 \ \subset I := \ i_1, i_2, ..., i_n \qquad (1.8)$$

Ta thấy: $I = I^0 \cup I^s$.

Với mỗi $i \in I^s$ thì đường thẳng $x = x^M + \acute{a} . z_M^i$ sẽ giao với siêu phẳng

$$< A^s, x > + \ b_s = 0 \text{ tại điểm } x^i = x^M + \alpha_i . z_M^i . \qquad (1.9)$$

trong đó $\alpha_i = -\dfrac{< A^s , x^M > + b_s}{< A^s , z_M^i >}$ (1.10)

Ta gọi

$$I_+^s := \ i \in I^s : \alpha_i > 0 \ = \ i \in I^s :< A^s , z_M^i >< 0 \ = \ i_{s1}, i_{s2}, ..., i_{sq} \qquad (1.11)$$

và $I_-^s := \ i \in I^s : \alpha_i < 0 \ .$

Rõ ràng $I_+^s \subset I^s \subset I$.

Định lý 1.2 $\forall s \in J^+(x^M)$ thì $I^s \neq \phi$

Chứng minh (xem [4])

Định lý 1.3 [4]

$I_+^s = \phi$ thì tập phương án của bài toán *(L)* là rỗng.

Định lý này cho ta kết luận rằng, nếu bài toán *(L)* có ít nhất một điểm chấp nhận được thì I_+^s là một tập khác rỗng.

1.2.3. Khái niệm nón xoay M(r,s) sinh ra từ nón M

Giả sử *M* là một nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc P_L xác định bởi (1.1) và $J^+(x^M) \neq \phi$, khi đó với mỗi $S \in J^+(x^M)$ và $r \in I^s$, tập hợp các điểm *x* thoả mãn hệ bất đẳng thức:

$$\begin{cases} < A^i, x > + b_i \leq 0, \forall i \in I, i \neq r \\ < A^s, x > + b_s \leq 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

xác định một nón đơn hình tuyến tính gọi là nón xoay *M(r,s)*, đỉnh là:

$$x^{M(r,s)} = x^r = x^M + \alpha_r . z_M^r \tag{1.13}$$

trong đó α_r xác định từ (1.10).

Đỉnh x^r thoả mãn:

$$< A^i, x^r > + b_i = 0, \forall i \in I(r,s) = (I \cup \{s\}) \setminus \{r\}.$$

Tập chỉ số cơ sở mới *I(r,s)* nhận được từ tập chỉ số cơ sở cũ *I* bằng cách loại chỉ số *r* ra khỏi tập cơ sở cũ, đưa chỉ số *s* vào thay. Ta nói nón xoay *M(r,s)* sinh ra từ nón *M.*

Bổ đề 1.1

Hệ $\{A^i\}$ với $i \in I(r,s)$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh

Thật vậy, nếu ngược lại hệ A^i với i$\in$*I(r,s)* là phụ thuộc tuyến tính thì dễ dàng suy ra tồn tại biểu diễn:

$$A^s = \sum_{i \in I \setminus \{r\}} \beta_i A^i \Rightarrow < A^s, z_M^r > = < \sum_{i \in I \setminus \{r\}} \beta_i A^i > = \sum_{i \in I \setminus \{r\}} \beta_i \left(A^i, z_M^i \right) = 0$$

Điều này mâu thuẫn với $< A^s, z_M^r > \neq 0$ (vì r$\in I^s$*).*

Bổ đề này cho ta thấy nón xoay *M(r,s)* vẫn là một nón đơn hình.

Các véc tơ chỉ phương $z_{M(r,s)}^i$, $i \in I(r,s)$ của nón xoay mới *M(r,s)* được xác định từ (1.4) với tập chỉ số cơ sở mới *I(r,s)*, hoặc xác định từ một trong các công thức đơn giản dưới đây theo các x^i, x^r, z_M^i, z_M^r (xác định từ (1.4), (1.9), (1.10)) với *i, r* thuộc *I* là tập chỉ số của cơ sở cũ:

$$z^i_{M(r,s)} = \begin{cases} z^i_M & khi \;\; i \in I^0 \\ z^i_M - \dfrac{\alpha_r}{\alpha_i} z^r_M & khi \;\; i \in I^s, i \neq r \\ -\dfrac{1}{<A^s, z^r_M>} . z^r_M & khi \;\; i = s \end{cases} \qquad (1.14)$$

Hay

$$z^i_{M(r,s)} = \begin{cases} z^i_M & khi \;\; i \in I^0 \\ z^i_M - \dfrac{<A^s, z^i_M>}{<A^s, z^r_M>} z^r_M & khi \;\; i \in I^s, i \neq r \\ -\dfrac{1}{<A^s, z^r_M>} . z^r_M & khi \;\; i = s \end{cases} \qquad (1.15)$$

Các công thức này gọi là các công thức đổi cơ sở, bổ đề dưới đây chứng minh các công thức trên.

Bổ đề 1.2 [4]

Giả sử *M* là nón xác định bởi *M:*$=\{x \in \mathbb{R}^n : <A^i, x> + b_i \leq 0, \forall i \in I\}$ với các véc tơ chỉ phương z_M^i của các cạnh xác định theo (1.4), các giao điểm x^i xác định theo (1.9), (1.10). Khi đó nón xoay *M(r,s)* có đỉnh là $x^{M(r,s)} = x^r$ xác định từ (1.12) với cơ sở tương ứng là $I(r,s) = I \cup \{s\} \setminus \{r\}$ và các véc tơ chỉ phương của các cạnh tương ứng là $z^i_{M(r,s)}$ được xác định bởi (1.15).

1.2.4. Định nghĩa Nón cực tiểu (Nón – min)

Nón đơn hình tuyến tính *M* với đỉnh là x^M được gọi là nón cực tiểu (nón – min) của hàm $f(x) = <C, x>$ của bài toán *(L)* nếu $f(x^M) \leq f(x), \forall x \in M$.

Ta nói *M* là một nón - min của bài toán *(L)* khi *M* là một nón – min của hàm mục tiêu *f* của bài toán *(L)*.

Giả sử M là một nón đơn hình xác định từ hệ (1.1) đỉnh là x^M, với véc tơ chỉ phương của cạnh i là z_M^i $(i \in I)$, xác định bởi (1.4), ta có định lý sau.

Định lý 1.4

Nếu $f(x^M) \le f(x^M + z_M^i)$ thì M là một nón - min của hàm f.

Chứng minh (xem [4])

Hệ quả 1.1

M là một nón - min của hàm $f(x)=<C,x>$ khi và chỉ khi:

$$<C, z_M^i> \ \ge 0, \ \forall i \in I.$$

Giả sử M là một nón - min của hàm mục tiêu $f(x)=<C,x>$ của bài toán (L).

Gọi

$$V^s := \{v \in I_+^s : f(x^v) = \min_{i \in I_+^s}\{f(x^i)\}\} \tag{1.16}$$

Vậy $V^s := \{v \in I_+^s : f(x^v) = \min_{i \in I_+^s} <C, x^i>\}$

Thay x^v và x^i xác định từ công thức (1.9) vào trên ta có:

$$V^s := \{v \in I_+^s :<C, x^v> \min_{i \in I_+^S} <C, x^i>\}$$

$$= \{v \in I_+^s :<C, x^M + \alpha_v.z_M^v> = \min_{i \in I_+^S}\{<C, x^M + \alpha_i.z_M^i>\}\}$$

$$= \{v \in I_+^s : \alpha_v.<C, z_M^v> = \min_{i \in I_+^S}\{\alpha_i.<C, z_M^i>\}\}$$

$$= \left\{ v \in I_+^s : -(<A^s, x^M> + b_s).\frac{<C, z_M^v>}{<A^s, z_M^v>} = \min_{i \in I_+^S}\{-(<A^s, x^M> + b_S).\frac{<C, z_M^i>}{<A^s, z_M^i>}\} \right\}$$

$$= \left\{ v \in I_+^s : -\frac{<C, z_M^v>}{<A^s, z_M^v>} = \min_{i \in I_+^S}\{-\frac{<C, z_M^i>}{<A^s, z_M^i>}\} \right\}$$

Vậy: $$V^s := \left\{ v \in I_+^s : -\frac{<C, z_M^v>}{<A^s, z_M^v>} = \min_{i \in I_+^S}\{-\frac{<C, z_M^i>}{<A^s, z_M^i>}\} \right\} \tag{1.17}$$

Định lý 1.5