ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÙI THỊ THU HẰNG

TÍNH HYPERBOLIC CỦA MIỀN HARTOGS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÙI THỊ THU HẰNG

TÍNH HYPERBOLIC CỦA MIỀN HARTOGS

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Trần Huệ Minh

THÁI NGUYÊN – 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của **TS. Trần Huệ Minh**

Trong khi nghiên cứu luận văn, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học và đồng nghiệp với sự trân trọng và biết ơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Thu Hằng

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **TS. Trần Huệ Minh**, người đã tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành khóa luận này.

Tôi xin cảm ơn Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm khoa Toán, các thầy cô giáo trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà nội đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu khoa học và hoàn thành khóa luận.

Xin cảm ơn các bạn học viên lớp cao học toán K21b đã luôn động viên, chia sẻ khó khăn và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình đã luôn động viên, quan tâm giúp đỡ tôi và luôn mong mỏi tôi thành công.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Thu Hằng

Mục lục

Danh mục ký hiệu

$A_{>0} := \{x \in A : x > 0\}$, trong đó $A \subset \mathbb{R}$;

$A_{\geqslant 0} := \{x \in A : x \geqslant 0\}$, trong đó $A \subset \mathbb{R}$;

$U_* := U \backslash \{0\}$, trong đó $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$;

$S^n = S \times ... \times S$ (n - lần);

$S \Subset T$: S là compact tương đối trong T;

∂S: Biên của S ;

$|\cdot| \equiv ||\cdot||_{\mathbb{C}}$: chuẩn Euclid trong $\mathbb{C}$;

$||\cdot|| \equiv ||\cdot||_{\mathbb{C}}^n$: chuẩn Euclid trong $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{B}_1(\lambda, r) := \mathbb{B}_{|\cdot|}(\lambda, r), \lambda \in \mathbb{C}, r > 0$;

$\mathbb{B}_n(z, r) := \mathbb{B}_{||\cdot||}(z, r), z \in \mathbb{C}^n, r > 0$;

$E := \mathbb{B}_1(0, 1)$: đĩa đơn vị trong mặt phẳng phức;

$\mathcal{C}^{\uparrow}(G)$: tập hợp tất cả các hàm nửa liên tục trên $f : G \to [-\infty, +\infty)$;

$\mathcal{C}(G, G')$: tập hợp tất cả các hàm liên tục từ G vào G';

$\mathcal{C}(G) := \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$;

$\mathcal{O}(G, G')$: tập hợp các ánh xạ chỉnh hình từ G vào G';

$\mathcal{O}(G) := \mathcal{O}(G, \mathbb{C})$;

$H^\infty(G)$: tập hợp tất cả các hàm chỉnh hình bị chặn trong G;

$H^\infty(G) \cong \mathbb{C}$: tất cả các hàm chỉnh hình bị chặn trên G đều là hằng số;

$PSH(G)$: tập hợp tất cả các hàm đa điều hoà dưới trên G;

$topd_G$: tôpô sinh bởi d_G;

$topG$: tôpô Euclid của G;

Mở đầu

Nghiên cứu tính hyperbolic của các không gian phức là một trong những bài toán cơ bản nhất của giải tích phức hyperbolic. Việc nghiên cứu đã được tiến hành dưới nhiều góc độ khác nhau, chẳng hạn như tìm kiếm những đặc trưng cho tính hyperbolic của một không gian phức tuỳ ý, khảo sát tính hyperbolic của những lớp không gian phức cụ thể, ứng dụng tính hyperbolic của không gian phức vào những lĩnh vực khác nhau của hình học phức và giải tích phức... Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu tính hyperbolic của những lớp không gian phức cụ thể cũng như việc tìm hiểu những lớp không gian phức hyperbolic ở dạng tường minh đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Miền Hartogs thuộc vào một trong số những lớp không gian phức như vậy.

Luận văn ***"Tính hyperbolic của miền Hartogs"*** nghiên cứu tính hyperbolic của miền Hartogs $\Omega = \Omega_{u,h}(G)$ trên một miền $G \subset \mathbb{C}^n$ với thớ cân bằng m chiều, chỉ ra sự khác biệt giữa tính $k-$ hyperbolic và tính $\tilde{k}-$hyperbolic của Ω, đồng thời nghiên cứu tính hyperbolic của miền Hartogs - Laurent $\Sigma = \Sigma_{u,v}(G)$ trên một miền $G \subset \mathbb{C}^n$ và đưa ra điều kiện cần và đủ để Σ là hyperbolic Brody.

Luận văn gồm 35 trang, trong đó có phần mở đầu, ba chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống lại các khái niệm và các tính chất cần thiết cho hai chương sau.

Chương 2: Trình bày về tính hyperbolic của miền Hartogs $\Omega = \Omega_{u,h}(G)$ với thớ cân bằng m chiều và chỉ ra sự khác biệt giữa tính $k-$ hyperbolic và tính $\tilde{k}-$ hyperbolic của Ω.

Chương 3: Trình bày tính hyperbolic của miền Hartogs - Laurent $\Sigma =$

$\Sigma_{u,v}(G)$ trên một miền $G \subset \mathbb{C}^n$ và đưa ra điều kiện cần và đủ để Σ là hyperbolic Brody.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt các kết quả được nghiên cứu trong luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy em rất mong nhận được những đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Thu Hằng

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này ta luôn ký hiệu E là đĩa đơn vị trong mặt phẳng phức. $\mathcal{O}(G_1, G_2)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ G_1 vào G_2 với tôpô compact mở, $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}(G, \mathbb{C})$.

1.1. Các hàm bất biến

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathcal{G}$ là tập các miền trong $\mathbb{C}^n$, ρ là khoảng cách Poincare trên đĩa đơn vị E, tức là

$$\rho(\lambda, \zeta) = tanh^{-1}(\tfrac{|1-\zeta|}{|1-\bar{\lambda}\zeta|}),\ \lambda, \zeta \in E.$$

Một họ $\underline{d} := (d_G)_{G \in \mathcal{G}}$ các hàm $d_G : G \times G \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ được gọi là co rút chỉnh hình nếu

i) $\underline{d}$ là chuẩn tắc, tức là $d_E = \rho$.

ii) $\underline{d}$ thoả mãn tính chất giảm, tức là $G, D \in \mathcal{G}$ ta có

$$d_D(f(z), f(\omega)) \leqslant d_G(z, \omega),\ f \in \mathcal{O}(G, D), z, \omega \in G.$$

Nhận xét 1.1. - Điều kiện ii) suy ra được họ $\underline{d}$ là bất biến đối với các ánh xạ song chỉnh hình, để cho ngắn gọn, ta gọi $d_G \in \underline{d}(G \in \mathcal{G})$ là hàm bất biến.

- Với $G_j \in \mathcal{G}, z_j', z_j'' \in G_j, j \in \{1, 2\}$ ta có

$$d_{G_1 \times G_2}((z_1', z_2'), (z_1'', z_2'')) \geqslant \max\{d_{G_1}(z_1', z_1''), d_{G_2}(z_2', z_2'')\} \qquad (*)$$

Ta nói họ $\underline{d}$ của các hàm bất biến có tính chất tích nếu đẳng thức trong $(*)$ đạt được với bất kỳ $G_j \in \mathcal{G}, z_j', z_j'' \in G_j, j \in \{1, 2\}$.

Định nghĩa 1.2. Cho D là một tập khác $\emptyset$, một hàm $d : D \times D \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gọi là một giả khoảng cách trên D nếu

i) $d(x, x) = 0, x \in D$

ii) d là đối xứng, tức là $d(x, y) = d(y, x),\ x, y \in S$

iii) d thoả mãn bất đẳng thức tam giác, tức là

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y),\ x, y, z \in D.$$

Giả khoảng cách d trên D được gọi là khoảng cách trên D nếu thoả mãn thêm điều kiện $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ với mọi $x, y \in D$.

Chú ý 1.1. Cho $G \in \mathcal{G},\ z, \omega \in G$. Tồn tại một ánh xạ $\varphi \in \mathcal{O}(E, G)$ có miền giá trị chứa cả z và ω. Và bất kỳ $f \in \mathcal{O}(G, E)$, ta có $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(E, E)$ và do đó

$$\rho(f(z), f(\omega)) = \rho((f \circ \varphi)(\lambda), (f \circ \varphi)(\zeta)) \leqslant \rho(\lambda, \zeta),$$

trong đó $\lambda, \zeta \in E$ với $\varphi(\lambda) = z, \varphi(\zeta) = \omega$.

Như vậy, ta có thể xác định được hai co rút chỉnh hình bằng cách xét các ánh xạ từ G vào E và từ E vào G như sau, với $z, \omega \in G \in \mathcal{G}$, ta đặt

$$c_G(z, \omega) := \sup_{f \in \mathcal{O}(G,E)} \rho(f(z), f(\omega)),$$

$$\tilde{k}_G(z, \omega) := \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{O}(E,G) \\ \varphi(\lambda) = z, \varphi(\zeta) = \omega}} \rho(\lambda, \zeta).$$

Theo chú ý 1.1, hàm $\tilde{k}_G$ là hàm giá trị thực không âm và do vậy c_G cũng là hàm giá trị thực không âm. Dễ thấy rằng $\underline{c} := (c_G)_{G \in \mathcal{G}}$ và $\underline{\tilde{k}} := (\tilde{k}_G)_{G \in \mathcal{G}}$ là các hàm co rút chỉnh hình và với bất kỳ $G \in \mathcal{G}$, hàm c_G là giả khoảng cách, $\tilde{k}_G$ là đối xứng nhưng trong trường hợp tổng quát nó không thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Hơn nữa, nếu $(d_G)_{G \in \mathcal{G}}$ là các hàm co rút chỉnh hình thì

$$c_G \leqslant d_G \leqslant \tilde{k}_G, \quad G \in \mathcal{G}.$$

Ta gọi c_G là giả khoảng cách Caratheodory của G và $\tilde{k}_G$ là hàm Lempert của G.