HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH GÓC

Phùng Thị Hải Yến[1*], Phùng Thị Oanh[2], Vũ Thị Tú Loan[3]
[1]Trường Cao đẳng Kinh Tế - Kỹ Thuật – ĐH Thái Nguyên
[2]Trường PT Vùng Cao Việt Bắc
[3]Trường Đại học Nông lâm – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài báo đề cập đến các vấn đề sau:

1) Sự khó khăn của người học khi gặp các bài toán lượng giác và họ thường không biết bắt đầu từ đâu vì không thấy được mối liên hệ giữa các hệ thức lượng giác đó.

2) Đưa ra dạng tổng quát của phép biến đổi tuyến tính góc từ đó giúp học sinh biết được phương pháp phân loại và tìm ra mối quan hệ giữa các hệ thức lượng giác trong tam giác. Như vậy số lượng các hệ thức lượng giác sẽ giảm đi một cách đáng kể. Đó là *phương pháp biến đổi tuyến tính góc.*

3) Một số bài tập liên quan đã được chứng minh bằng phương pháp *biến đổi tuyến tính góc* dạng đối xứng.

Từ khóa: *Hệ Thức, lượng giác, tam giác, biến đổi, tuyến tính*

ĐẶT VẤN ĐỀ

Những bài toán liên quan đến các hệ thức trong tam giác thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi, các đề thi đại học, cao đẳng... học sinh thường không biết bắt đầu từ đâu vì không thấy được mối liên hệ giữa các hệ thức lượng giác. Do đó cần có các phương pháp giúp học sinh phân loại và tìm ra mối quan hệ giữa các hệ thức lượng giác trong tam giác.

Một trong các phương pháp phân loại và tạo ra hệ thức lượng giác trong tam giác là *phương pháp biến đổi tuyến tính góc*. Bằng cách sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc để tạo ra tam giác mới $A_1B_1C_1$ từ tam giác ABC. Từ một hệ thức đã biết cho tam giác $A_1B_1C_1$, ta sẽ có một hệ thức mới trong tam giác ABC.

Dạng tổng quát của phép biến đổi tuyến tính góc là:

$$A_1 = k_{11}A + k_{12}B + k_{13}C + \lambda_1\pi,$$
$$B_1 = k_{21}A + k_{22}B + k_{23}C + \lambda_2\pi,$$
$$C_1 = k_{31}A + k_{32}B + k_{33}C + \lambda_3\pi,$$
$$A_1 + B_1 + C_1 = \pi,\ A_1 > 0,\ B_1 > 0,\ C_1 > 0.[1]$$

Do đó, bằng cách chọn các bộ hệ số $k_{ij}, \lambda_i\ (i, j = 1,2,3)$, ta sẽ có rất nhiều phép biến đổi tuyến tính góc. Trong bài bảo này, chúng tôi đưa ra một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng đối xứng.

CÁC KẾT QUẢ ĐƯỢC SỬ DỤNG

Mệnh đề 2.1. *Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Khi ấy*

$$A_1 = \frac{A + (n-1)B}{n},\ B_1 = \frac{B + (n-1)C}{n},$$
$$C_1 = \frac{C + (n-1)A}{n}$$

với $n = 2,3,\ldots$ cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh: Thật vậy, vì A, B, C là ba góc của tam giác nên $0 < A, B, C < \pi$ và $A + B + C = \pi$. Suy ra

$$0 < A_1 = \frac{A + (n-1)B}{n} < \frac{\pi + (n-1)\pi}{n} < \pi.$$

Tương tự, $0 < B_1, C_1 < \pi$ và $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$.

Vậy A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 2.2. *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi ấy.*

$$A_1 = \frac{B + (n-1)C}{n}, B_1 = \frac{C + (n-1)A}{n},$$

* *Tel: 0280 3748180, Email: Haiyend2d@gmail.com*

$C_1=\frac{A+(n-1)B}{n}$ *với* $n=2,3,...$ *cũng là ba góc của một tam giác.*

Đặc biệt khi $n=2$ ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1. *Cho* A,B,C *là ba góc của tam giác. Khi ấy* $A_1=\frac{B+C}{2}$, $B_1=\frac{C+A}{2}$, $C_1=\frac{A+B}{2}$ *cũng là ba góc của một tam giác.*

Chú ý 2.1. Vì $A_1=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}$ nên $0<A_1=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}<\frac{\pi}{2}$ và phép biến đổi tuyến tính góc $A_1=\frac{B+C}{2}$, $B_1=\frac{C+A}{2}$, $C_1=\frac{A+B}{2}$ cũng chính là phép biến đổi tuyến tính góc $A_2=\frac{\pi-A}{2}$, $B_2=\frac{\pi-B}{2}$, $C_2=\frac{\pi-C}{2}$ và $\Delta A_2B_2C_2$ có ba góc nhọn.

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}\ [2] \qquad (2.1)$$

Chứng minh: Ta có

$$(2.1)\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\cos A-\cos B-\cos C\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3+2\cos(B+C)-2\cos B-2\cos C\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin^2 B+\cos^2 B+\sin^2 C+\cos^2 C$$

$$+2\cos B\cos C-2\sin B.\sin C-2\cos B-2\cos C\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(\sin B-\sin C)^2+(1-\cos B-\cos C)^2\ge 0,$$

luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}. \qquad (2.2)$$

Chứng minh:

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi lượng giác

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)^2+\left(1-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)^2\ge 0$$

luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc

Đặt $A_1=\frac{\pi-A}{2}$, $B_1=\frac{\pi-B}{2}$, $C_1=\frac{\pi-C}{2}$. Khi ấy A_1,B_1,C_1 là ba góc nhọn của một tam giác. Do đó hệ thức (2.1) đúng cho tam giác $A_1B_1C_1$.

Vì $\cos A_1=\sin\frac{A}{2}$, $\cos B_1=\sin\frac{B}{2}$, $\cos C_1=\sin\frac{C}{2}$ nên ta có

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos A_1+\cos B_1+\cos C_1\le\frac{3}{2}.$$

Chú ý 2.2. *Nếu* A,B,C *là ba góc nhọn của một tam giác thì* $A_2=\pi-2A$, $B_2=\pi-2B$, $C_2=\pi-2C$ *cũng là ba góc của tam giác.*

Ví dụ 2.3. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây đúng với mọi tam giác ABC:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2} \qquad (2.3)$$

Chứng minh:

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi lượng giác

Với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+\frac{3}{2}$$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\left(2\cos^2 C-1\right)+\frac{3}{2}$$

$$=2\cos^2 C-2\cos C\cos(A-B)+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(\cos^2 C-\cos C\cos(A-B)+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\cos^2(A-B)\right)$$

$$=2\left(\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2(A-B)\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)=0$ và $\sin(A-B)=0$

hay ABC là tam giác đều.

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc

Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của một tam giác. Áp dụng chú ý 2.2 và ví dụ 2.1 cho tam giác $A_2B_2C_2$ ta được:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

$$= -\cos A_2 - \cos B_2 - \cos C_2 \geq -\frac{3}{2}.$$

Chú ý 2.3. *Nếu A, B, C là ba góc của ΔABC thì $A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}$ cũng là ba góc của $\Delta A_3B_3C_3$ tù với* $\frac{\pi}{2} < C_3 = \frac{\pi + C}{2} < \pi$.

Ví dụ 2.4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2} < \frac{3}{2}. \qquad (2.4)$$

Chứng minh:

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi lượng giác

$$(2.4) \Leftrightarrow 3 - 2\cos\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sin\frac{B+C}{2} - 2\cos\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\right)^2 > 0,$$

luôn đúng vì dấu bằng không xảy ra.

Thật vậy,

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2} = \cos\frac{\pi - B}{2} \Rightarrow C = \pm(\pi - B). \text{ Vô lí.}$$

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc Đặt $A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$. Khi ấy A_3, B_3, C_3 là ba góc của tam giác tù $A_3B_3C_3$.

Ta đã biết hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (xem ví dụ 2.1) đúng cho tam giác $A_3B_3C_3$ bất kì. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A_3B_3C_3$ là tam giác đều nên ở đây dấu đẳng thức không xảy ra vì $A_3B_3C_3$ là tam giác tù. Ta có:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2} = \cos A_3 + \cos B_3 + \cos C_3 < \frac{3}{2}.$$

Như vậy, bằng phép biến đổi tuyến tính góc $A_1 = \frac{\pi - A}{2}, B_1 = \frac{\pi - B}{2}, C_1 = \frac{\pi - C}{2}$ và $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$, từ ví dụ 2.1 ta đã tìm ra mối liên hệ với các hệ thức (2.2), hệ thức (2.3) và hệ thức (2.4). Tuy nhiên, không phải với tam giác nào ta cũng áp dụng được phương pháp biến đổi tuyến tính góc cụ thể nào đó. Thí dụ, phép biến đổi tuyến tính góc $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ đòi hỏi thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn.

MỘT SỐ BÀI TẬP

Bài 3.1 Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC có ba góc nhọn ta có:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{1}{3}(\tan A \tan B \tan C).$$

Bài 3.2 Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{3}\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

Bài 3.3 Có nhận xét gì về tam giác ABC biết $\tan A \tan B \tan C = 3(\cot A + \cot B + \cot C)$.

Bài 3.4 (Tuyển tập đề thi Olympic 30-4, năm 2007) Cho tam giác ABC có p, R, r tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương:

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = 3\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) \quad (1)$$

$$\sqrt{3r(4R + r)} = p \quad (2)$$

Và có nhận xét gì về dạng của tam giác ABC khi có (1) hoặc (2).

Bài 3.5 Cho tam giác ABC không vuông, chứng minh rằng:

$$3\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 5(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)$$

$$\leq 9 + \tan^2 A \tan^2 B + \tan^2 B \tan^2 C + \tan^2 C \tan^2 A.$$

Bài 3.6 Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$3\left(\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}\right)-5\left(\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\le 9+\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}+\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{C}{2}.$$

Bài 3.7 Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$3\left(\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}\right)-5\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\right)$$

$$<9+\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{C}{2}.$$

Bài 3.8 Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và mọi số thực $k>0$, ta luôn có

$$\cos 3A+\cos 3B+k\cos 3C\le\frac{2k^2+1}{2k}.$$

Bài 3.9 Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và mọi số thực $k>\frac{1}{2}$, ta luôn có

$$\cos 6A+\cos 6B+k\cos 6C\ge-\frac{2k^2+1}{2k}.$$

KẾT LUẬN

Như vậy, bằng cách sử dụng "Hệ thức lượng trong tam giác với phép biến đổi tuyến tính góc" bài báo đã trình bày sơ bộ cách phân loại và tìm ra mối quan hệ giữa các hệ thức lượng giác trong tam giác và được thể hiện thông qua một số đề thi học sinh giỏi, đề thi vào Đại học, một số bài toán trong tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* ...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, *Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc* (Bản thảo năm 2010).

[2]. Trần Phương, *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán – Hệ thức lượng giác*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2004.

[3]. Võ Giang Mai, *Chuyên đề hệ thức lượng trong tam giác*. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2001.

SUMMARY

THE TRIGONOMETRIC FORMULAS IN THE TRIANGLE WITH ANGLE LINEAR TRANSFORMATIONS

Phùng Thị Hải Yến*[1], Phùng Thị Oanh[2], Vũ Thị Thu Loan[3]

[1]*College of Economics and Technology - TNU*

[2]*Viet Bac Highland Upper Secondary School*

[3]*College of Agriculture and Forestry - TNU*

Article refers to the following issues:

1) The difficulty of the learners when they meet trigonometric problems and they often do not know where to start because they don't see the relationship between those trigonometric formulas.

2) Give the general form of angle linear transformations to help students know classification methods and find out the relationship between the trigonometric formulas in the triangle. Therefore, the number of trigonometric systems will decrease significantly. That's *the method of angle linear transformations*.

3) A number of exercises have been shown by the method of *angle linear transformations* of the symmetric form.

Key words: Formulas, trigonometry, triangle, transformation, linear.

Ngày nhận bài: 20/4/2012, ngày phản biện: 30/5/2012, ngày duyệt đăng: 12/6/2012

* *Tel: 0280 3748180, Email: Haiyend2d@gmail.com*