ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THU HIỀN

VỀ BÀI TOÁN DIOPHANTINE TUYẾN TÍNH CỦA FROBENIUS

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

––––––––––

ĐỖ THỊ THU HIỀN

VỀ BÀI TOÁN DIOPHANTINE TUYẾN TÍNH CỦA FROBENIUS

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên - Năm 2013

LỜI CAM ĐOAN

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận văn là do tôi làm và không sao chép các luận văn đã được công bố trước đó.

Tác giả

Đỗ Thị Thu Hiền

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Sau quá trình nhận đề tài và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS Lê Thị Thanh Nhàn, luận văn "Về bài toán Diophantine tuyến tính của Frobenius" của tôi đã được hoàn thành. Có được kết quả này, đó là nhờ sự dạy bảo hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào Tạo - Khoa học - Quan hệ quốc tế và Khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất trong suốt quá trình học tập tại trường cũng như thời gian tôi hoàn thành đề tài này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng hết sức tốt đẹp.

Tôi xin cảm ơn Trường PT Vùng cao Việt Bắc - nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K5A (Khóa 2011 - 2013) đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

LỜI NÓI ĐẦU

Mục đích của luận văn là trình bày lại một cách tương đối hệ thống một vài kết quả quan trọng về bài toán Diophantine tuyến tính của Frobenius (còn gọi là bài toán Frobenius).

Bài toán: *Cho trước k số nguyên dương* $a_1, ..., a_k$ *nguyên tố cùng nhau. Xác định số nguyên lớn nhất* $g(a_1, ..., a_k)$ *không là tổ hợp tuyến tính không âm của* $a_1, ..., a_k$*, tức là không thể viết dưới dạng* $m_1a_1 + ... + m_ka_k$ *với* $m_1, ..., m_k$ *là các số nguyên không âm.*

Số $g(a_1, ..., a_k)$ trong bài toán trên được gọi là *số Frobenius.* Bài toán Frobenius có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như Lí thuyết số, Lí thuyết tự động và Tổ hợp. Đặc biệt, bài toán Frobenius đã được sử dụng để phân tích các mạng Petri, để nghiên cứu bài toán phân loại các không gian véc tơ, các nhóm Aben, để nghiên cứu các mật mã hình học đại số thông qua tính chất của các nửa nhóm đặc biệt, để nghiên cứu các bài toán xếp hình...

Một ví dụ nổi tiếng về bài toán Frobenius là "bài toán đổi tiền của Frobenius": *Cho trước k loại tiền với các mệnh giá là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, xác định khoản tiền lớn nhất không thể đổi thành các loại tiền trên.* Trong các cuốn sách về số học sơ cấp, chúng ta tìm thấy nhiều ví dụ dạng như: tìm khoản tiền lớn nhất không thể đổi được thành các loại tiền mệnh giá 3 xu, 5 xu, 7 xu.

Bài toán Frobenius đã được giải quyết trọn vẹn cho trường hợp hai số. Từ những năm 1890, người ta đã biết công thức tính số Frobenius của hai số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau là $ab - b - a$. Bên cạnh đó, người ta cũng xác định được công thức tính số các số nguyên dương không biểu diễn được qua a, b là $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$. Vì thế, rất tự nhiên, nhiều nhà toán học quan tâm đến việc mở rộng bài toán Frobenius cho trường hợp từ 3 số trở lên. Tuy nhiên việc giải quyết cho trường hợp nhiều hơn hoặc bằng 3 số là vô cùng khó, nó đã và đang thách thức các nhà toán học trong suốt thời gian dài và cho đến nay vẫn là bài toán mở.

Luận văn gồm 3 chương. Trong chương 1, chúng tôi giới thiệu sơ lược về bài toán Frobenius và chứng minh sự tồn tại số Frobenius $g\left(a_1, ..., a_k\right)$. Chương 2, trình bày lời giải trọn vẹn cho bài toán Frobenius trong trường hợp hai số, trong đó có công thức tính số Frobenius $g\left(a, b\right)$ (Định lí 2.1.1) và công thức tính $n\left(a, b\right)$ - số các số nguyên dương không biểu diễn được qua a, b (Định lí 2.2.2). Phần đầu Chương 3 dành để chứng minh một kết quả nổi bật cho bài toán Frobenius trong trường hợp 3 số (Định lí 3.1.3). Phần cuối Chương 3 trình bày sơ lược những thành tựu và các hướng nghiên cứu tiếp theo đối với bài toán Frobenius cho trường hợp từ 3 số.

Các kết quả và thông tin trong luận văn được viết chủ yếu dựa vào cuốn sách của J. L. Alfonsin "The diophantine Frobenius problem" xuất bản bởi Oxford University Press năm 2005, cuốn sách của Jefrey Shallit "The Frobenius Problem and Its Generalizartion" xuất bản bởi Springer năm 2008, và bài báo của F. Curtis "On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup" đăng trên Math. Scand. năm 1990.

Chương 1

GIỚI THIỆU BÀI TOÁN FROBENIUS

Ferdinand Georg Frobenius (26/10/1849 - 03/08/1917) là một nhà toán học người Đức nổi tiếng với những đóng góp trong lí thuyết các hàm Eliptic, phương trình vi phân và lí thuyết nhóm. Ông được giới khoa học biết đến vì phát minh ra những đồng nhất định thức gọi là các công thức Frobenius-Stickelberger. Ông đã có nhiều đóng góp quan trọng trong việc phát triển lí thuyết dạng song toàn phương và là người đầu tiên giới thiệu khái niệm xấp xỉ hữu tỷ cho các hàm (ngày nay gọi là xấp xỉ Pade). Ông là người đưa ra chứng minh đầy đủ đầu tiên cho Định lí Cayley-Hamilton. Tên của Ông đã được đặt cho một số đối tượng hình học trong Vật lí Toán hiện đại, chẳng hạn như "Đa tạp Frobenius", vì Ông đã có những đóng góp quan trọng trong lĩnh vực này.

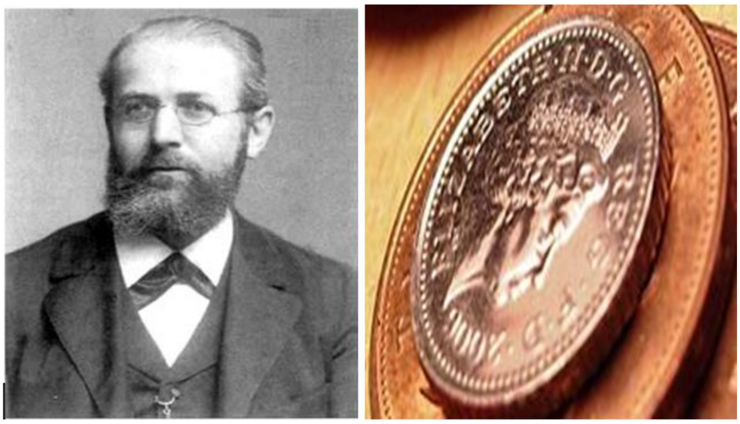
1.1 Bài toán đổi tiền của Frobenius

Alfred Brauer (1894-1985) đã viết trong bài báo [Bra] đăng năm 1942 rằng Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917), một nhà toán học người Đức, là người đã vài lần giới thiệu bài toán sau đây trong các bài giảng của mình vào những năm 1880, nhưng Frobenius không công bố trong bất cứ tài liệu nào.

Bài toán Frobenius: *Cho trước k số nguyên dương $a_1, ..., a_k$ nguyên tố cùng nhau. Xác định số nguyên lớn nhất $g\left(a_1, ..., a_k\right)$ không là tổ hợp tuyến tính không âm của $a_1, ..., a_k$, tức là không thể viết dưới dạng tổ hợp* *tuyến tính* $m_1a_1 + ... + m_ka_k$ *với* $m_1, ..., m_k$ *là các số nguyên không âm.*

Alfred Brauer (là học trò của Isaac Shur và cũng là học trò của Georg Frobenius) đã đầu tư công sức để giải quyết bài toán Frobenius trong suốt hơn 10 năm sau đó (từ 1942 đến 1954 - xem bài báo của Alfred Brauer và B. M. Seelbinder: *On a problem of partitions*, American Journal of Mathematics, **76** (1954), 343-346).

Một ví dụ nổi tiếng về bài toán Frobenius là "bài toán đổi tiền của Frobenius": *Cho trước k loại tiền với các mệnh giá là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, xác định khoản tiền lớn nhất không thể đổi thành các loại tiền trên.*



Hình 1.1. Nguồn internet

Chẳng hạn, trong các cuốn sách về số học sơ cấp, chúng ta tìm thấy nhiều ví dụ dạng như:

a) Tìm khoản tiền lớn nhất không thể đổi được thành các loại tiền mệnh giá 2 xu và 5 xu (Đáp án: 3 xu).

b) Tìm khoản tiền lớn nhất không thể đổi được thành các loại tiền mệnh giá 3 xu, 5 xu và 7 xu (Đáp án: 4 xu).

Vào năm 1972, nhiều kết quả quan trọng về bài toán Frobenius được công bố. Một số kết quả tiêu biểu được viết trong bài báo của P. Erdos và E. L. Graham, *On a linear diophantine problem of Frobenius,* Acta Arithmetica, 45 (1972), 399-408. Và từ đó bài toán Frobenius còn được gọi là "bài toán Diophantine tuyến tính của Frobenius".

Một ví dụ nổi tiếng khác là bài toán mua một miếng gà chiên (Hình 1.2): tại một quán ăn nhanh, gà chiên được bán thành các loại gói đóng sẵn, bao gồm gói 6 miếng, gói 9 miếng và gói 20 miếng. Tìm số miếng gà chiên nhiều nhất không thể mua được tại quán ăn này (Đáp án: 43 miếng).

Hình 1.2. Nguồn internet

1.2 Số Frobenius và sự tồn tại của nó

Trong tiết này, cho trước k số nguyên dương $a_1, ..., a_k$ nguyên tố cùng nhau (tức là $\gcd(a_1, ..., a_k) = 1$). Một *tổ hợp tuyến tính không âm* của $a_1, ..., a_k$ là một số nguyên n dạng $n = m_1a_1 + ... + m_ka_k$ với $m_1, ..., m_k$ là các số nguyên không âm.

1.2.1. Định nghĩa. Số nguyên lớn nhất không là tổ hợp tuyến tính không âm của các số nguyên $a_1, ..., a_k$ được gọi là *số Frobenius* ứng với bộ số $a_1, ..., a_k$.

Theo Matthias Beck and Sinai Robins [BR], số Frobenius ứng với bộ số $a_1, ..., a_k$ được kí hiệu là $g(a_1, ..., a_k)$. Chú ý rằng mọi số nguyên x lớn hơn số Frobenius $g(a_1, ..., a_k)$ đều biểu diễn được dạng:

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k$$

với $x_1, ..., x_k$ là các số nguyên không âm. Ta gọi những số nguyên viết được thành tổ hợp tuyến tính không âm của $a_1, ..., a_k$ là những số *biểu diễn được* qua bộ số $a_1, ..., a_k$.

1.2.2. Ví dụ. Số Frobenius ứng với 2 và 5 là 3. Thật vậy, rõ ràng 3 không biểu diễn được qua 2 và 5. Cho $x > 3$. Nếu x chẵn thì x là bội của 2 và do đó nó biểu diễn được qua 2 và 5. Nếu x lẻ thì $x = 5 + y$, trong đó y là một số chẵn. Vì thế x cũng biểu diễn được qua 2 và 5. Vậy $g(2, 5) = 3$.

1.2.3. Ví dụ. Số Frobenius ứng với 3, 5, 7 là 4. Thật vậy, ta cần chứng