BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

NGUYỄN ĐỨC LẠNG

# PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN VÀ NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

**Chuyên ngành: Toán Giải tích**
**Mã số: 62 46 01 02**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

**Người hướng dẫn khoa học**
**GS.TS. Nguyễn Bường**

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của Thầy GS. TS. Nguyễn Bường.

Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Các kết quả được công bố chung đã được đồng tác giả cho phép sử dụng trong luận án.

Nghiên cứu sinh

**Nguyễn Đức Lạng**

## LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu sinh Nguyễn Đức Lạng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học GS. TS. Nguyễn Bường, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã định hướng nghiên cứu cho nghiên cứu sinh, sự chỉ bảo ân cần của thầy GS. TS. Nguyễn Bường đã giúp cho nghiên cứu sinh có ý thức trách nhiệm và quyết tâm cao trong suốt quá trình làm luận án.

Nghiên cứu sinh xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà khoa học thầy: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, GS. TS. Trần Vũ Thiệu, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, PGS. TS. Cung Thế Anh, PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, PGS. TS. Phạm Việt Đức, PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, PGS. TS. Trần Diên Hiển, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, TS. Nguyễn Công Điều, PGS. TS. Phạm Ngọc Anh, PGS. TS. Nông Quốc Chinh, PGS. TS. Lê Lương Tài, PGS. TS. Hà Trần Phương, TS. Trương Minh Tuyên, TS. Ngô Văn Định, TS. Nguyễn Thanh Sơn, TS. Vũ Vinh Quang, TS. Nguyễn Đình Dũng, TS. Vũ Mạnh Xuân, TS. Đào Thị Liên, v.v ... đã cho những ý kiến đóng góp quí báu trong suốt thời gian nghiên cứu sinh học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám đốc, Ban Đào tạo (Bộ phận Sau đại học) Đại học Thái Nguyên; Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo (Bộ phận Sau đại học), Ban Chủ nhiệm Khoa Toán, Bộ môn Giải tích trường Đại học Sư phạm; Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học; các thầy cô, bạn bè đồng nghiệp đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin cảm ơn kính tặng bố, mẹ, vợ, con và những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này.

Nghiên cứu sinh: **Nguyễn Đức Lạng**

# Mục lục

# DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

| | |
|---|---|
| $\langle .,. \rangle$ | tích vô hướng |
| $\|x\|$ | chuẩn của phần tử $x$ trong $H$ |
| $\emptyset$ | tập rỗng |
| $\forall x$ | mọi $x$ |
| $\exists x$ | tồn tại $x$ |
| $I$ | ánh xạ đồng nhất |
| $\cap$ | phép giao |
| $D(A)$ | miền xác định của toán tử $A$ |
| $\inf A$ | cận dưới đúng của tập hợp $A$ |
| $\sup A$ | cận trên đúng của tập hợp $A$ |
| $\max A$ | số lớn nhất trong tập hợp $A$ |
| $\mathbb{N}$ | tập hợp các số tự nhiên |
| $\mathbb{N}^*$ | tập hợp các số tự nhiên khác 0 |
| $M$ | số nút chia |
| $\mathbb{R}$ | tập hợp các số thực |
| $\mathbb{R}^+$ | tập các số thực không âm |
| $E$ | không gian Banach |
| $H$ | không gian Hilbert |
| $P_C(x)$ | hình chiếu của $x$ lên tập hợp $C$ |
| $x := y$ | $x$ được định nghĩa bằng $y$ |
| $\limsup_{n\to\infty} x_n$ | giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$ |
| $\liminf_{n\to\infty} x_n$ | giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$ |
| $x_n \to x$ | dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $x$ |

| | |
|---|---|
| $x_n \rightharpoonup x$ | dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $x$ |
| $F(T)$ | tập điểm bất động của ánh xạ $T$ |
| $\{T(t) : t \geq 0\}$ | nửa nhóm không giãn |
| $\mathcal{F}$ | tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn |

# MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động trong các không gian mêtric đã thực sự lôi cuốn sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước trong hàng chục năm qua. Điều đó không chỉ vì lý thuyết điểm bất động đóng vai trò quan trọng trong toán học mà còn vì những ứng dụng của nó trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân, lý thuyết tối ưu, lý thuyết xấp xỉ, các mô hình toán học và lý thuyết kinh tế. Nhiều nhà toán học tên tuổi như Brower E., Banach S., Bauschke H. H., Moudafi A., Xu H. K., Schauder J., Browder F. E., Ky Fan K., Kirk W. A., Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường, Lê Dũng Mưu, v.v ... đã mở rộng các kết quả về bài toán điểm bất động của ánh xạ co trong không gian hữu hạn chiều cho bài toán điểm bất động của ánh xạ liên tục Lipschitz, ánh xạ giả co, ánh xạ không giãn, v.v ... trong không gian Hilbert, không gian Banach. Những kết quả mở rộng này không chỉ đề cập đến sự tồn tại điểm bất động mà còn đề cập đến vấn đề xấp xỉ điểm bất động của một ánh xạ. Gần đây những nghiên cứu về bài toán tìm điểm bất động của lớp các ánh xạ không giãn đã trở thành một trong những hướng nghiên cứu hết sức sôi động của giải tích phi tuyến. Một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động kinh điển phải kể đến là phương pháp lặp Krasnosel'skii [20], phương pháp lặp Mann [22], phương pháp lặp Halpern [16], phương pháp lặp Ishikawa [17], v.v .... Một số nhà nghiên cứu trong nước cũng có những công trình thú vị về tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert và không gian Banach (xem [3] - [5], [36] - [43], v.v ...).

Cho $C$ là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $H$, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. [27] đã đề xuất một cải biên của phương pháp lặp Mann dựa trên phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học (được đề xuất lần đầu tiên vào năm 2000 bởi Solodov M. V., Svaiter B. F. [32]) ở dạng

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(x_n), \\ C_n = \{z \in C: \ \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C: \ \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \ge 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Họ đã chứng minh được rằng nếu dãy $\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ với $a \in [0, 1)$ thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.1) hội tụ mạnh về $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$ khi $n \to \infty$, trong đó $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$ là hình chiếu của $x_0$ trên tập điểm bất động $F(T)$ của ánh xạ không giãn $T$.

Năm 2000 Moudafi A. [26] đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ x_n = \dfrac{1}{1+\lambda_n}T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}f(x_n), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

và

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+\lambda_n}T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}f(x_n), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn $T$, trong đó $f : C \to C$ là một ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$ và $\{\lambda_n\}$ là một dãy số dương. Ông đã chứng minh rằng:

1) Nếu $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$ thì dãy lặp (0.2) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$x^* \in \mathrm{F}(T) \ \text{ sao cho } \ \langle (I - f)(x^*), x^* - x\rangle \le 0, \quad \forall x \in \mathrm{F}(T). \tag{0.4}$$

2) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{\lambda_{n+1}} - \dfrac{1}{\lambda_n}\right| = 0$, thì dãy lặp (0.3) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (0.4).

Năm 2007, Alber Y. I. [2] đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép

$$x_{n+1} = P_C\Big(x_n - \mu_n[x_n - T(x_n)]\Big), \quad n \geq 0, \tag{0.5}$$

và chứng minh rằng nếu dãy $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$, được chọn sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và dãy $\{x_n\}$ bị chặn, thì mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc tập điểm bất động của $T$.

Mở rộng cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$, năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. [27] đã đề xuất phương pháp

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - x_0, z - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{0.6}$$

trong đó $\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ với $a \in [0, 1)$ và $t_n \to +\infty$. Với một số điều kiện thích hợp cho dãy $\{\alpha_n\}$ và $\{t_n\}$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.6) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, ở đây $\mathcal{F} = \cap_{t>0} F(T(t))$ được giả thiết là khác rỗng.

Năm 2008, Takahashi W. và các cộng sự [35] đề xuất một dạng đơn giản của (0.6) như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}(x_0), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n(x_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

Họ đã chỉ ra trong [35] rằng nếu $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$, $0 < \lambda_n < \infty$ với mọi $n \geq 1$ và $\lambda_n \to \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.7) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$.

Cũng trong thời điểm đó, Saejung S. [29] đã xét quá trình lặp tương