ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN HỒNG ĐĂNG

HÀM LỒI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN HỒNG ĐĂNG

HÀM LỒI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Nếu sai tôi xin hoàn toàn chịu mọi hình thức kỷ luật theo quy chế của trường.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Hồng Đăng

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này là thành quả làm việc của tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS, người đã tận tình dìu dắt tác giả trong những bước đầu tiên trên con đường nghiên cứu khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban giám hiệu trường ĐHSP Thái Nguyên, Khoa Đào Tạo Sau Đại Học cùng toàn thể các thầy cô giáo đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường ĐHSP Thái Nguyên.

Tôi xin cảm ơn những người thân trong gia đình, các bạn bè gần xa, những người đã dành cho tác giả nhiều quan tâm ưu ái để luận văn sớm được hoàn thành. Tôi mong nhận được những ý kiến chân tình của các thầy cô giáo, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Hồng Đăng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Giải tích lồi là một trong những môn toán được quan tâm và phát triển mạnh mẽ của toán học. Nó được sử dụng rộng rãi trong tối ưu hóa, vận trù học, kinh tế, giao thông, ngân hàng và nhiều lĩnh vực khác nữa. Nhiều bài toán trong thực tế và trong kỹ thuật có thể được quy về việc tìm

$$\underset{x \in D}{Min}\, f(x), \tag{1}$$

trong đó D là tập con của không gian vectơ X , $f : D \to \mathbb{R}$.

1) Nếu f là tuyến tính và D là đa diện lồi, thì bài toán (1) được gọi là bài toán qui hoạch tuyến tính và đã có những phương pháp giải rất hoàn hảo như phương pháp đơn hình của Danzig, thuật toán Khachian, Kamakar.

2) Nếu f là hàm lồi và D là tập lồi thì bài toán (1) là bài toán qui hoạch lồi và đã được nhiều tác giả nghiên cứu đưa ra các phương pháp giải hữu hiệu như Rockafellar, Wolfe, Frechel và Meaureau...

Mặt khác, một vấn đề đặt ra là: lớp các hàm lồi trong không gian Banach có các tính chất:

a) Nó ổn định dưới dạng tổng hữu hạn và tổng súp hữu hạn.

b) Điều kiện tối ưu $0 \in \partial f(x)$ trong đó ∂f là dưới vi phân cổ điển là điều kiện cần cho *x* là cực tiểu địa phương .

c) Đẳng thức xảy ra đối với phép lấy tổng dưới vi phân

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) .$$

d) Tính chất: Nếu $\partial f_1(x) = \partial f_2(x)$ với mọi $x \in X$ khi đó $f_1 - f_2$ là hằng số.

Mục đích của luận văn là giới thiệu một số tính chất cơ bản của lớp hàm lồi vô hướng và hàm lồi vectơ . Đó là: Tính liên tục, tính Lipschitz địa phương, tính khả dưới vi phân và ứng dụng của chúng.

Luận văn có nhan đề: ***Hàm lồi vec tơ và ứng dụng.***

Chương 1 của luận văn giới thiệu lại những kiến thức cơ bản của giải tích lồi. Chương 2 trình bày những mở rộng các tính chất, kết quả của hàm lồi vô hướng cho hàm vectơ lồi theo nón. Trong các không gian tô pô tuyến tính nói chung chưa có khái niệm thứ tự. Để tạo ra được thứ tự trong các không gian này, người ta đưa vào khái niệm nón: Cho Y là không gian vectơ tô pô, tập $C \subset Y$ được gọi là nón nếu $tC \subset C$ với mọi $t \geq 0$.

Nếu C là tập lồi, đóng, $C \cap (-C) = \{0\}$ thì C được gọi là nón lồi đóng nhọn. Ta định nghĩa $x, y \in X$, $x \succeq_C y$ nếu $x - y \in C$. Khi ấy, $\succeq_C$ là một quan hệ thứ tự từng phần. Dựa vào thứ tự này ta định nghĩa hàm vectơ lồi như sau: Cho $D \subseteq X$ là tập lồi khác rỗng, Y là không gian vectơ tô pô, ta nói
$F : D \to Y$ là hàm vectơ lồi nếu
$F(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_C \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y)$, với mọi $x, y \in D$, $\alpha \in [0;1]$.

Ta sẽ nghiên cứu các tính chất liên tục theo nón, tính khả dưới vi phân theo nón của hàm lồi và các ứng dụng của nó trong luận văn.

Chương 1
HÀM LỒI VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Trong những năm gần đây giải tích lồi là một trong những môn học phát triển và ứng dụng mạnh mẽ trong các bài toán ứng dụng vào thực tế như : toán tối ưu, toán vận trù học, toán kinh tế và trong các ngành kỹ thuật. Mục đích của chương này là giới thiệu các khái niệm cơ bản của tập lồi, hàm lồi, các tính chất: liên tục, Lipschitz địa phương, tính khả dưới vi phân của hàm lồi và ứng dụng trong lý thuyết tối ưu.

1.1. Định nghĩa tập lồi, các hàm lồi và các tính chất

1.1.1. Tập lồi

Cho *X* là không gian tô pô thực, *X** là không gian tô pô đối ngẫu của *X*, $\mathbb{R}$ là tập số thực, ký hiệu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Trước hết ta nhắc lại, định nghĩa tập lồi được định nghĩa như sau

Định nghĩa 1.1.1.1. Tập $A \subset X$ là tập lồi nếu $\forall a,b \in A$ với mọi

$$\lambda \in [0;1] : \lambda a + (1-\lambda)b \in A .$$

Tập $A \subset X$ với mọi $\forall a,b \in A$ đoạn thẳng nối a,b được xác định

$$[a,b] = \{x \in A : x = \lambda a + (1-\lambda)b \ ;\ 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Nhận xét 1.1.1.2. Tập A là tập lồi khi và chỉ khi với mọi $a,b \in A$ thì $[a,b] \subset A$.

Dưới đây, là những ví dụ về tập lồi thường gặp

Định nghĩa 1.1.1.3. Cho $f \in X^*, \alpha$ là một số thực cố định

Tập $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ gọi là một siêu phẳng;

$H^{+} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ gọi là nửa không gian trên;

$H^{-} = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ gọi là nửa không gian dưới.

Tất cả các tập trên đều là tập lồi.

Tiếp theo, ta nhắc lại các khái niệm khác liên quan tới tập lồi

Định nghĩa 1.1.1.4. Cho $A \subset X$.

i) Giao của tất cả các tập lồi chứa tập *A* được gọi là bao lồi của *A*

$$coA = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ x_i \in A \quad i = 1,2,\ldots,n \right\};$$

ii) Giao của tất cả các tập lồi đóng chứa tập *A* được gọi là bao lồi đóng của *A*, ký hiệu là $\overline{co}A$.

Mệnh đề 1.1.1.5. Giả sử $A \subset X$ là một tập lồi, khi đó

i) Phần trong $int\,A$ và bao đóng $\overline{A}$ là các tập lồi;

ii) Với $x_1 \in int\,A$, $x_2 \in A$ thì $[x_1, x_2] \subset int\,A$;

iii) Nếu $int\,A \neq \varnothing$ thì $\overline{A} = \overline{int\,A}$, $int\,\overline{A} = int\,A$.

Khái niệm tách các tập lồi, đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết tối ưu.

Định nghĩa 1.1.1.6. Cho các tập $A, B \subset X$ ta nói phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \neq 0$ tách *A* và *B* nếu tồn tại một số α sao cho

$\langle f, y\rangle \leq \alpha \leq \langle f, x\rangle$ với mọi $x \in A$, với mọi $y \in B$; (1.1)

Trong đó, $\langle f, x\rangle = f(x)$ là tích vô hướng giữa X và X^{*}.

Nếu các bất đẳng thức ở (1.1) là thực sự, tức là

$\langle f, y\rangle < \alpha < \langle f, x\rangle$ với mọi $x \in A,\ y \in B$

thì ta nói f tách chặt *A* và *B*.

Siêu phẳng $H = \{x \in X : \langle f,x \rangle = \alpha\}$ gọi là siêu phẳng tách *A* và *B*. Các tập *A*, *B* được gọi là tách được.

Nhận xét 1.1.1.7. i) Bất đẳng thức (1.1) tương đương với bất đẳng thức

$$\langle f,y \rangle \le \langle f,x \rangle,\ \forall x \in A,\ \forall y \in B\ ;$$

ii) Phiếm hàm $f \neq 0$ tách chặt *A* và *B*, nếu tồn tại số $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle f,y \rangle \le \langle f,x \rangle - \varepsilon,\ \forall x \in A,\ \forall y \in B\ .$$

Định lý 1.1.1.8. $[1]$ Cho *A* và *B* là các tập lồi trong *X*, $A \cap B = \varnothing$, hoặc $int A \neq \varnothing$ hoặc $int B \neq \varnothing$. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \neq 0,\ f \in X$ tách *A* và *B*.

Hệ quả 1.1.1.9. $[1]$Cho *A*,*B* là các tập lồi trong *X*, $int A \neq 0$ khi đó *A*, *B* tách được khi và chỉ khi $(int A) \cap B = \varnothing$.

Định lý 1.1.1.10. $[1]$Giả sử *A* là tập lồi đóng trong không gian lồi địa phương *X* và $x_0 \notin A$ khi đó tồn tại $f \in X^*,\ f \neq 0$ tách chặt A và x_0.

Hệ quả 1.1.1.11. Cho *X* là không gian Hausdorff lồi địa phương $A \subset X$ ta có

i) $\overline{co} A$ trùng với giao của tất cả các nửa không gian chứa *A*;

ii) Nếu *A* là tập lồi khi đó *A* đóng khi và chỉ khi *A* đóng theo tô pô yếu.

1.1.2. Hàm lồi

Cho $A \subset X$ là tập lồi $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Định nghĩa 1.1.2.1. Hàm f được gọi là hàm lồi nếu với mọi $x,y \in A$ với mọi