ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ MINH NGUYỆT

TÊN ĐỀ TÀI
SỰ TƯƠNG TỰ GIỮA SỐ VÀ HÀM VÀ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN SƠ CẤP

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2010

Công trình được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Phản biện 1:..
....

Phản biện 2:..
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày .... tháng .... năm 2010

Có thể tìm hiểu tại
THƯ VIỆN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mở đầu

Sự phát triển của số học, đặc biệt trong những năm gần đây, chịu ảnh hưởng rất lớn của sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Giữa số học và đa thức có sự tương tự rất lớn nên để nghiên cứu các tính chất nào đó của số nguyên người ta thử phát biểu tính chất này trên vành đa thức. Chẳng hạn định lý Fermat cho đa thức được chứng minh rất đơn giản dựa vào định lý Mason. Từ định lý Mason cho đa thức ta có giả thuyết abc cho các số nguyên, mà định lý cuối cùng của Fermat chỉ là hệ quả của giả thuyết này.

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu sự tương tự giữa số nguyên và đa thức trên trường số phức. Cụ thể ứng dụng định lý Mason trong nghiên cứu đa thức, tìm tòi những tương tự số học của định lý Mason và các hệ quả của nó. Ứng dụng sự tương tự đó đề xuất một số bài tập về đa thức và số học tương ứng. Đồng thời tìm hiểu sự mở rộng của định lý Mason.

Nội dung luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bầy định lý Mason và một số hệ quả của định lý Mason, áp dụng định lý Mason đề đề xuất một số bài tập về đa thức.

Chương 2: Một số kết quả tương tự của số học cho định lý Mason như giả thuyết abc, một số hệ quả của giả thuyết abc, các kết quả tương tự của số học cho các định lý và bài tập ở chương 1.

Chương 3: Trình bầy định lý Mason mở rộng, áp dụng định lý Mason mở rộng vào nghiên cứu đa thức nhiều biến.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của GS.TS Hà Huy Khoái. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp

các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi xin cảm ơn Sở Nội vụ, Sở Giáo dục và Đào tạo Tuyên Quang, trường THPT Tân Trào, Tổ Toán trường THPT Tân Trào đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin gửi tới các thầy cô khoa Toán, phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Khoa Học, Đại Học Thái Nguyên cũng như các Thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2008 - 2010, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của Nhà trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và những người đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 9 năm 2010

Tác giả

Lê Thị Minh Nguyệt

Mục lục

Chương 1
Định lý Mason và ứng dụng của nó

1.1. Định lý Mason

Trước hết ta thấy rõ giữa tập hợp các số nguyên và tập hợp các đa thức có những tính chất rất giống nhau. Ta để ý đến sự tương tự giữa phân tích ra thừa số nguyên tố và đa thức bất khả quy. Nếu giả thiết K là trường đóng đại số thì mỗi đa thức $f(x) \in K[x]$ có thể phân tích dạng:

$$f(x) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n},$$

trong đó $p_i(x) = (x - a_i), \;\; a_i \in K$.
Như vậy có thể nói rằng, trong sự phân tích bất khả quy và phân tích ra thừa số nguyên tố, các nghiệm của đa thức tương ứng với các thừa số nguyên tố của số nguyên. Do đó số các nghiệm phân biệt của đa thức có vai trò tương tự như số các ước nguyên tố của số nguyên.

Vào năm 1983, R.C.Mason đã cho một kết quả đánh giá quan hệ giữa bậc của các đa thức với số các nghiệm phân biệt của tích các đa thức đó.

1.1.1 Định lý Mason:
Giả sử P, Q, R là các đa thức một biến với hệ số phức, nguyên tố cùng nhau từng cặp, thỏa mãn:

$$P + Q = R.$$

Khi đó nếu ta kí hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phân biệt của đa thức f thì ta có:

$$\max\{degP, degQ, degR\} \leq n_0(P.Q.R) - 1.$$

1.2.2 Chứng minh định lý: Từ giả thiết $P + Q = R$ ta suy ra

$$\frac{P}{R} + \frac{Q}{R} = 1.$$

Để tiện lợi trong tính toán ta đặt $f = \dfrac{P}{R}$ và $g = \dfrac{Q}{R}$. Khi đó, $f + g = 1$ nên $f^{'} + g^{'} = 0$ và thay $f^{'} = -g^{'}$ ta được

$$\frac{\frac{f^{'}}{f}}{\frac{g^{'}}{g}} = -\frac{g}{f} = -\frac{Q}{P}.$$

Giả sử ta có sự phân tích các hàm hữu tỉ theo các nghiệm của đa thức

$$P = m\prod(z - a_i)^{\alpha_i}; Q = n\prod(z - b_t)^{\beta_t}; R = l\prod(z - c_j)^{\gamma_j}.$$

Theo công thức đạo hàm của tích ta được

$$\frac{P^{'}}{P} = m\sum\frac{\alpha_i}{z - a_i}$$

$$\frac{Q^{'}}{Q} = n\sum\frac{\beta_t}{z - b_t}$$

$$\frac{R^{'}}{R} = l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}.$$

Ta lại có

$$\frac{f^{'}}{f} = \frac{P^{'}}{P} - \frac{R^{'}}{R},$$

Tương tự cho

$$\frac{g^{'}}{g} = \frac{Q^{'}}{Q} - \frac{R^{'}}{R}.$$

Do đó

$$\frac{Q}{P} = -\frac{m\sum\frac{\alpha_i}{z - a_i} - l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}}{n\sum\frac{\beta_t}{z - b_t} - l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}}.$$

Ta kí hiệu

$$D(z) = \prod(z - a_i)\prod(z - b_t)\prod(z - c_j).$$

Hiển nhiên $D(z) = n_0(PQR)$ và

$$\frac{D(z)}{z - a_i} = n_0(PQR) - 1 = \frac{D(z)}{z - b_t} = \frac{D(z)}{z - c_j}. \qquad 1.1$$

Nhân cả tử số và mẫu số cho $D(t)$ ta được

$$\frac{Q}{P} = -\frac{m\sum \frac{\alpha_i}{z-a_i} - l\sum \frac{\gamma_j}{z-c_j}}{n\sum \frac{\beta_t}{z-b_t} - l\sum \frac{\gamma_j}{z-c_j}}.\frac{D(z)}{D(z)}. \qquad 1.2$$

Theo (1.1) thì cả tử và mẫu ở (1.2) đều có dạng tổng của các đa thức có bậc bằng $n_0(PQR)-1$. như vậy $\frac{Q}{P}$ là tỉ số của hai đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(PQR)-1$.

Vì P và Q nguyên tố cùng nhau và từ (1.2) ta có

$$Q.(D.\frac{g'}{g}) = -P.(D.\frac{f'}{f}).$$

Do đó ta có cả P và Q đều có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(PQR)-1$.

Ta lại có $R = P + Q$ nên R cũng có bậc không vượt quá $n_0(PQR)-1$.

Vậy

$$\max\{degP, degQ, degR\} \leq n_0(PQR)-1.$$

Điều phải chứng minh.

1.2. Một số hệ quả của định lý Mason

Sử dụng định lý Mason, ta có cách chứng minh đơn giản của định lý Fermat cho đa thức.

1.2.1 Định lý cuối cùng của Fermat cho đa thức:

Với $\forall n \geq 3$ không tồn tại các đa thức P, Q, R khác hằng số, hệ số phức, nguyên tố cùng nhau thỏa mãn phương trình:

$$P^n + Q^n = R^n.$$

Chứng minh:

Giả sử các đa thức P, Q, R thỏa mãn phương trình trên: Rõ ràng số nghiệm phân biệt của đa thức $P^nQ^nR^n$ không vượt quá

$degP + degQ + degR$. Áp dụng định lý Mason ta có:

$$\max\{degP^n, degQ^n, degR^n\} \leq n_0(P^nQ^nR^n)-1.$$

$$\Leftrightarrow \max\{n.degP, n.degQ, n.degR\} \leq n_0(P.Q.R) - 1$$

$$\leftrightarrow \max\{n.degP, n.degQ, n.degR\} \leq degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Rightarrow n.degP \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$n.degQ \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$n.degR \leq degP + degQ + degR - 1.$$

Cộng lại từng vế ta được:

$$n(degP + degQ + degR) \leq 3(degP + degQ + degR) - 3.$$

(Vô lý với $n \geq 3$) $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

1.2.2 Hệ quả của định lý Mason

Không tồn tại đa thức khác hằng P, Q, R, nguyên tố cùng nhau từng đôi một thỏa mãn:

$$P^{2008} + Q^{2009} = R^{2010}.$$

Chứng minh:

Áp dụng định lý trên ta có:

$$\max\{degP^{2008}, degQ^{2009}, degR^{2010}\} \leq n_0(P^{2008}.Q^{2009}.R^{2010}) - 1$$

$$\Leftrightarrow \max\{2008degP, 2009degQ, 2010degR\} \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$\Rightarrow 2008degP \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$2009degQ \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$2010degR \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$\Rightarrow 2008degP + 2009degQ + 2010degR \leq 3(degP + degQ + degR) - 3$$

$$\Leftrightarrow 2005degP + 2006degQ + 2007degR \leq -3.$$

(Vô lý)

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh

1.2.3 Định lý Fermat mở rộng cho đa thức

Không tồn tại các đa thức P, Q, R, nguyên tố cùng nhau từng đôi một thoả mãn:

$$P^m + Q^n = R^k,$$

với $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} < 1$.

Chứng minh: Áp dụng định lý Mason ta có :

$$\max\{degP^m, degQ^n, degR^k\} \leq n_0(P^m.Q^n.R^k) - 1,$$

$$\Leftrightarrow \max\{mdegP, ndegQ, kdegR\} \leq degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Rightarrow mdegP \leq degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{degP}{degP + degQ + degR - 1}.$$

Tương tự :

$$\frac{1}{n} \geq \frac{degQ}{degP + degQ + degR - 1},$$

$$\frac{1}{k} \geq \frac{degR}{degP + degQ + degR - 1}.$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \geq \frac{degP + degQ + degR}{degP + degQ + degR - 1} > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Ta được điều phải chứng minh.

1.2.4 Định lý Davenport:

Giả sử P, và Q là hai đa thức khác hằng và $P^2 \neq Q^3$. *Khi đó ta có :*

$$deg(P^2 - Q^3) \geq \frac{1}{2}deg(Q) + 1,$$

hay

$$deg(P^2 - Q^3) \geq \frac{1}{3}deg(P) + 1.$$

Chứng minh:

Đặt $R = P^2 - Q^3 \Leftrightarrow R + Q^3 = P^2$.

Áp dụng định lý Mason :

$$\max\{degR, degQ^3, degP^2\} \leq n_0(P^2RQ^3) - 1$$