ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THẾ PHONG

ĐIỀU KIỆN KUHN-TUCKER MẠNH CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU LIPSCHITZ ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THẾ PHONG

ĐIỀU KIỆN KUHN-TUCKER MẠNH CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU LIPSCHITZ ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - Năm 2014

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Đỗ Văn Lưu. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, khoa Sau đại học - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán k20a, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thế Phong

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Lý thuyết các điều kiện tối ưu đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu hóa. Đối với bài toán tối ưu đa mục tiêu, người ta muốn nhận được các điều kiện Kuhn -Tucker mà tất cả các nhân tử Lagrange ứng với tất cả các thành phần của hàm mục tiêu là dương. Ta gọi đó là các điều kiện Kuhn-Tucker mạnh. Năm 1994, T. Maeda đã đưa ra điều kiện chính quy Guignard suy rộng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc bất đẳng thức, với các hàm khả vi liên tục và nhận được các điều kiện Kuhn -Tucker mạnh. Khái niệm dưới vi phân suy rộng không lồi (convexificator) của V. Jeyakumar - D.T. Luc [6] tổng quát hóa một số khái niệm dưới vi phân đã biết như các dưới vi phân Clarke, Michel-Penot, Mordukhovich,... Các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem chẳng hạn [4], [6]-[8] và các tài liệu tham khảo trong các bài báo đó). X.F. Li và J.Z. Zhang (2005) đã phát triển các kết quả của Maeda cho bài toán có ràng buộc bất đẳng thức với các hàm Lipschitz địa phương dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng. Đây là đề tài được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nhiên cứu. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài: "*Điều kiện Kuhn-Tucker mạnh cho bài toán tối ưu đa mục tiêu Lipschitz địa phương*". Luận văn trình bày các kết quả nghiên cứu về các điều kiện Kuhn-Tucker mạnh của X.F. Li và J.Z. Zhang (2005), T. Maeda (1994).

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các sách, tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến bài toán tối ưu véc tơ. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu về điều kiện Kuhn - Tucker mạnh cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc bất đẳng thức trong hai trường hợp: trường hợp thứ nhất cho các hàm khả vi và trường hợp thứ hai cho các hàm Lipschitz địa phương. Cụ thể, chúng tôi đọc hiểu và trình bày lại một cách tường minh hai bài báo sau:

1) T. Maeda, *Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: Differentiable case* , J.Optim. Theory Appl, vol 80 (1994), 483-500.

2) X.F. Li, J.Z. Zhang, *Stronger Kuhn-Tucker type conditions in nonsmooth multiobjective optimization: Locally Lipschitz case*, J.Optim.Theory Appl, Vol 127 (2005), 367-388.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 3 chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Dưới vi phân Clarke và dưới vi phân suy rộng

Trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân Clarke trong [1] và dưới vi phân suy rộng trong [6].

Chương 2. Điều kiện Kuhn - Tucker mạnh cho bài toán tối ưu đa mục tiêu khả vi

Trình bày các điều kiện Kuhn - Tucker mạnh của T. Maeda [9] cho bài toán tối ưu đa mục tiêu khả vi có ràng buộc bất đẳng thức với điều kiện chính quy Guignard suy rộng.

Chương 3. Điều kiện Kuhn - Tucker mạnh cho bài toán tối ưu đa mục tiêu Lipschitz địa phương

Trình bày các điều kiện Kuhn - Tucker mạnh của X.F. Li và J.Z. Zhang [7] cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc bất đẳng thức với các hàm Lipschitz địa phương và điều kiện chính quy Guignard suy rộng không trơn. Mối quan hệ giữa các điều kiện chính quy không trơn cũng được trình bày trong chương này.

Chương 1

Dưới vi phân Clarke và dưới vi phân suy rộng

Trong chương này chúng tôi trình bày khái quát những kiến thức về dưới vi phân Clarke và dưới vi phân suy rộng cho lớp các hàm Lipschitz địa phương. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo trong các tài liệu [1], [6].

1.1 Dưới vi phân Clarke

Giả sử X là không gian Banach, $f : X \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.1.
a) *Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$, số $K > 0$ sao cho:*

$$(\forall x, x' \in U) \quad |f(x) - f(x')| \leq K||x - x'||. \tag{1.1}$$

Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương trên tập $Y \subset X$, nếu f Lipschitz địa phương tại mọi $x \in Y$.
b) *Hàm f được gọi là Lipschitz với hằng số Lipschitz K trên tập $Y \subset X$ nếu (1.1) đúng với mọi $x, x' \in Y$.*

Giả sử X, Y là các không gian Banach, $F : X \to Y$. Kí hiệu $L(X, Y)$ là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y.

Định nghĩa 1.1.2.

Đạo hàm của F theo phương v tại $\bar{x}$ được xác định bởi:

$$F'(\bar{x};v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(\bar{x}+tv)-F(\bar{x})}{t}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Định nghĩa 1.1.3.

Ánh xạ F được gọi là khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$, nếu tồn tại $\Lambda \in L(X,Y)$ sao cho với mỗi $v \in X$,

$$F(\bar{x}+tv) = F(\bar{x}) + t\Lambda v + o(t). \tag{1.2}$$

Khi đó, ta gọi Λ là đạo hàm Gâteaux của F tại $\bar{x}$.

Nhận xét 1.1.4.

Nếu ánh xạ F khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$, thì

$$\frac{F(\bar{x}+tv)-F(\bar{x})}{t} - \Lambda v \to 0. \tag{1.3}$$

Sự hội tụ này đồng đều theo v trên các tập hữu hạn.

Định nghĩa 1.1.5.

Ánh xạ F được gọi là khả vi Hadamard tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\Lambda \in L(X,Y)$ sao cho với mỗi $v \in X$ (1.2) đúng, và (1.3) hội tụ đồng đều theo v trên các tập compact.

Định nghĩa 1.1.6.

Ánh xạ F được gọi là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, nếu tồn tại $\Lambda \in L(X,Y)$ sao cho:

$$F(\bar{x}+v) = F(\bar{x}) + \Lambda v + r(v),$$

trong đó $||r(v)||_Y.||v||_X^{-1} \to 0$ khi $||v||_X \to 0$.

Nhận xét 1.1.7.

a) Ánh xạ F khả vi Fréchet tại $\bar{x} \Leftrightarrow \exists \Lambda \in L(X,Y)$ sao cho (1.2) đúng và (1.3) hội tụ đồng đều theo v trên các tập bị chặn.

b) Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì khái niệm khả vi theo Hadamard và Fréchet là trùng nhau.

Định nghĩa 1.1.8.
Ánh xạ F được gọi là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, nếu tồn tại $\gamma > 0$ và số $K > 0$ sao cho:

$$||F(x') - F(x'')||_Y \leq K||x' - x''||_X \qquad (\forall x', x'' \in \bar{x} + \gamma B),$$

trong đó B là hình cầu đơn vị mở.

Định lý 1.1.9. ([1])
Giả sử f là hàm lồi trên tập lồi mở U; bị chặn trên trong một lân cận của một điểm nào đó thuộc U. Khi đó, f Lipschitz địa phương trên U.

Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in X$.

Định nghĩa 1.1.10.
Đạo hàm suy rộng Clarke của hàm f theo phương $v \in X$ tại $\bar{x}$, kí hiệu là $f^o(\bar{x}; v)$, được xác định như sau:

$$f^o(\bar{x}; v) = \lim_{x \to \bar{x}} \sup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

trong đó $x \in X, t > 0$.

Định lí sau đây cho ta một số tính chất quan trọng của đạo hàm suy rộng theo phương.

Định lý 1.1.11. ([1])
Giả sử f Lipschitz địa phương với hằng số Lipschitz K tại x. Khi đó:
(i) Hàm $v \to f^o(x; v)$ hữu hạn, thuần nhất dương, dưới cộng tính trên X và $|f^o(x; v)| \leq K||v||$;
(ii) $f^o(x; v)$ nửa liên tục trên theo $(x; v)$; $f^o(x; .)$ Lipschitz (theo v) với hằng số K trên X;
(iii) $f^o(x; -v) = (-f)^o(x; v)$

Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương trên không gian Banach X $(f : X \to \mathbb{R})$; X^* là không gian liên hợp của X (X^* gồm các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X).

Định nghĩa 1.1.12.
Dưới vi phân Clarke của hàm f tại $\bar{x}$, kí hiệu $\partial_C f(\bar{x})$, là tập hợp sau đây trong X^*:

$$\partial_C f(\bar{x}) = \{\xi \in X^* : f^o(\bar{x}; u) \geq \langle \xi, u \rangle, \forall u \in X\}.$$

Nếu f là hàm lồi trên X thì dưới vi phân của hàm lồi f được định nghĩa như sau:

$$\partial_{CA} f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : f(x) - f(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle, \forall x \in X\}.$$

Nhận xét 1.1.13.

$$\partial_C f(\bar{x}) = \partial_{CA} f^o(\bar{x}; 0),$$

trong đó $\partial_{CA} f^o(\bar{x}; 0)$ là dưới vi phân của hàm lồi $f^o(\bar{x}; .)$ tại 0.

Định lý 1.1.14. ([1])
Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương với hằng số K tại $\bar{x}$. Khi đó,
a) $\partial_C f(\bar{x}) \neq \emptyset$, lồi, compact yếu* và

$$||\xi||_* \leq K \qquad (\forall \xi \in \partial_C f(\bar{x}));$$

b) Với mọi $v \in X$, ta có:

$$f^o(\bar{x}; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial_C f(\bar{x})\}$$

Ví dụ 1.1.15.
Xét trường hợp $X = \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Khi đó f là hàm Lipschitz trên $\mathbb{R}$ với hằng số Lipschitz $K = 1$, vì $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ta có $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$.
a) Ta lấy $x > 0$. Khi đó:

$$f^o(x; v) = \lim_{y \to x; t \downarrow 0} \frac{y + tv - y}{t} = v$$

$\Rightarrow \partial_C f(x) = \{\zeta \in \mathbb{R} : v \geq \zeta v, \forall v \in \mathbb{R}\} = \{1\}$
b) Tương tự, nếu $x < 0$, thì $\partial_C f(x) = \{-1\}$.
c) Xét trường hợp $x = 0$:

$$f^o(0; v) = \begin{cases} v, & \text{nếu} \quad v \geq 0 \\ -v, & \text{nếu} \quad v < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^o(0; v) = |v| \Rightarrow \partial_C f(0) = \{\zeta \in \mathbb{R} : |v| \geq \zeta v, \forall v \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow \partial_C f(0) = [-1; 1].$