ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGÔ THẾ GIANG

CÁC DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2010

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức là một chuyên đề cơ bản của toán học. Đây là là dạng toán rất quan trọng trong chương trình phổ thông. Các kết quả về nội dung này đã được trình bày rất hoàn chỉnh, đầy đủ ở những tài liệu trong nước và Quốc tế. Mặt khác, trong các kì thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng, đặc biệt là các kì thi Học sinh giỏi, ta vẫn hay gặp các dạng bài toán về bất đẳng thức. Để giúp học sinh phổ thông tìm hiểu các kết quả về bất đẳng thức cổ điển của các nhà toán học đã nghiên cứu, đồng thời nắm được các kĩ thuật chứng minh các dạng bất đẳng thức cụ thể và hệ thống chung theo một logic nhất định là nhiệm vụ mà đề tài luận văn này đề cập đến.

Bằng cách đưa ra các dạng bất đẳng thức về giá trị trung bình, mục tiêu của bản luận văn sẽ giúp cho học sinh nắm được các kết quả đầy đủ, chi tiết và cách thức vận dụng chúng để giải quyết một số bài toán liên quan.

Việc xây dựng các dạng trung bình đồng bậc khác nhau cũng nhằm giúp học sinh nhìn nhận, khái quát hóa được nhiều bất đẳng thức mà các học sinh vẫn thường gặp. Từ đó tạo cho các em làm quen với việc tập dượt nghiên cứu các chuyên đề toán sau này.

Luận văn ngoài mục lục, mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, gồm 3 chương.

Chương 1. Các giá trị trung bình cơ bản.
Nội dung chương này nhằm trình bày các giá trị trung bình cơ bản. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM) và các dạng trung bình đồng bậc khác. Đây là phần lí thuyết cơ sở để vận dụng cho các bài toán ứng dụng ở chương sau.

Chương 2. Một số định lí liên quan đến biểu diễn các giá trị trung bình.

Chương này trình bày một số định lí liên quan tới các giá trị trung bình mà trực tiếp liên quan tới chương trình toán Trung học phổ thông. Đó là lớp hàm lồi, hàm lõm và các hàm đơn điệu bậc cao.

Chương 3. Một số áp dụng.

Đây là nội dung ứng dụng của các chương 1 và chương 2 vào việc giải quyết các bài toán về cực trị đại số, cực trị lượng giác, đồng thời ứng dụng để giải quyết các dạng toán về giải và biện luận phương trình.

Tiếp theo, nêu bài tập minh họa được tập hợp, lựa chọn từ những đề trong các kì thi học sinh giỏi Quốc gia, kì thi Olympic khu vực và Quốc tế...

Đối với mỗi dạng bài tập đều có nêu phương pháp giải cụ thể. Các bài tập được trình bày theo một hệ thống với nhiều lời giải độc đáo, thể hiện tính sáng tạo. Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS-TSKH, nhà giáo nhân dân Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư, đã tận tình giúp đỡ tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Nhân đây tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học, Khoa Toán- Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K2.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới UBND Tỉnh, Sở GD và ĐT Tỉnh Lạng Sơn, Ban giám hiệu trường THPT Việt Bắc Thành phố Lạng Sơn, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả có cơ hội được học tập, nghiên cứu.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, song vì khuôn khổ bài viết, bản luận văn này vẫn còn nhiều vấn đề chưa được đề cập tới, và vì thời gian và khả năng có hạn, chắc chắn luận văn sẽ không tránh khỏi khiếm khuyết. Tác giả mong muốn nhận được nhiều ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô, cùng bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn.

Thái Nguyên, 08 tháng 09 năm 2010.

Chương 1

Các giá trị trung bình cơ bản

Trong chương này, ta sẽ đề cập đến các giá trị trung bình cơ bản, định lí về bất đẳng thức giá trị trung bình cộng và giá trị trung bình nhân (Còn gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc ngắn gọn là bất đẳng thức AG), bất đẳng thức AG suy rộng và các dạng trung bình đồng bậc khác (xem [1]-[7]).

1.1 Hàm biểu diễn các giá trị trung bình cơ bản

Giả sử $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Xét các đại lượng trung bình sau

(1) Trung bình cộng $M_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i.$

(2) Trung bình nhân $M_2 = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}.$

(3) Trung bình điều hòa $M_3 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}.$

(4) Trung bình bình phương $M_4 = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}.$

Ta có hệ thức sau giữa các đại lượng trung bình.

Định lý 1.1. *Với mọi bộ số dương a_i, $i = 1, 2, \dots, n$, ta luôn có*

$$M_3 \le M_2 \le M_1 \le M_4.$$

Trong trường hợp $n = 2$, ta có thể mô tả ý nghĩa hình học của định lý như sau.

Xét nửa đường tròn đường kính BC, tâm O. Giả sử $OD \perp BC$ tại O. Từ điểm E bất kì khác D, ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt BC kéo dài ở A. Kẻ $EF \perp BC, F \in BC$.

Đặt $AB = a_1 > 0, AC = a_2 > 0$ $(a_1 \neq a_2)$. Khi đó, $AO = \dfrac{a_1 + a_2}{2} > AE$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông). Mặt khác, ta có

$$AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{(AO + OE)(AO - OE)} = \sqrt{AB.AC} = \sqrt{a_1 a_2}.$$

Suy ra $M_3 = AO > AE = M_2$ hoặc $AE^2 = AC.AB$ tức là $AE = \sqrt{AB.AC}$ (hệ thức lượng trong đường tròn).

Từ công thức $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$, ta có

$$\begin{aligned} AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} + \sqrt{\frac{(AO - OD)^2 + (AO + OD)^2}{2}} \\ = \sqrt{\frac{AC^2 + AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} = M_4. \end{aligned}$$

(3) Theo bất đẳng thức Cauchy, thì $M_2 \leq M_1$.

(4) Vậy nên $M_3 \leq M_2 \leq M_1 \leq M_4$.

Ví dụ 1.1 (Đề thi học sinh giỏi năm 1980)**.** Gọi $T = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \quad (m_i > 0)$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{k} \left(m_i + \frac{1}{m_i} \right)^2 \geq k \left(\frac{k}{T} + \frac{T}{k} \right)^2. \tag{1.1}$$

Giải. Ta có

$$(1.1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} m_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i^2} \geq k \left(\frac{k^2}{T^2} + \frac{T^2}{k^2} \right).$$

Ta có

$$\frac{T}{k} = M_1 \leq M_4 = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} m_i^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{k^2} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \geq k \frac{T^2}{k^2}.$$

Lại có

$$\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i^2} = M_3 \leq M_2 = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} m_i^2} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} m_i} . \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} m_i}$$

$$\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i.\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i = \frac{T^2}{k^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i^2} \geq k\frac{k^2}{T^2}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i^2} \geq k\left(\frac{k^2}{T^2} + \frac{T^2}{k^2}\right).$$

Ví dụ 1.2 (Đề thi học sinh giỏi năm 1976)**.** Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm M nào nằm trong tam giác ABC ta đều có

$$d_a.d_b.d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}, \tag{1.2}$$

trong đó d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M lần lượt đến các cạnh $BC, CA, AB; a, b, c$ là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác. Hãy mở rộng (1.2) cho tứ diện trong không gian.

Giải. +) Ta có thể viết $ad_a+bd_b+cd_c = 2S$, khi xét ba tam giác MBC, MAC, MAB. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$ad_a.bd_b.cd_c \leq \left(\frac{ad_a + bd_b + cd_c}{3}\right)^3 = \left(\frac{2S}{3}\right)^3 = \frac{8S^3}{27},$$

tức là

$$d_a.d_b.d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad_a = bd_b = cd_c$, tức là

$$d_a : d_b : d_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

+) Xét 4 hình chóp $MBCD, MACD, MABD, MABC$, trong đó M là một điểm bất kỳ nằm trong tứ diện $ABCD$, ta có thể viết

$$S_Ad_A + S_Bd_B + S_Cd_C + S_Dd_D = 3V.$$

Từ đó ta có

$$S_Ad_A.S_Bd_B.S_Cd_C.S_Dd_D = \left(\frac{S_Ad_A + S_Bd_B + S_Cd_C + S_Dd_D}{4}\right)^4 = \left(\frac{3V}{4}\right)^4,$$

tức là

$$d_Ad_Bd_Cd_D \leq \frac{81V^4}{256S_AS_BS_CS_D}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_Ad_A = S_Bd_B = S_Cd_C = S_Dd_D$, tức là

$$d_A : d_B : d_C : d_D = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} : \frac{1}{S_D}.$$

Ví dụ 1.3 (Đề thi học sinh giỏi năm 1981)**.** Cho n số thực $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sao cho $0 < p \leq t_k \leq q$ với $k = 1, 2, \ldots, n$.

Biết rằng

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} t_k \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} t_k^2.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{A^2}{B} \geq \dfrac{4pq}{(p+q)^2}$ và tìm điều kiện cần và đủ để có dấu đẳng thức.

Giải. Ta có

$$\sum_{i=1}^{k}(t_k - p)(t_k - q) \leq 0.$$

Từ đó

$$\sum_{i=1}^{k} t_k^2 - (p+q)\sum_{i=1}^{k} t_k + npq \leq 0.$$

Hay

$$B - (p+q)A + pq \leq 0.$$

Vậy $\dfrac{B}{A^2} \leq -\dfrac{pq}{A^2} + \dfrac{p+q}{A^2} = -pq\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{p+q}{2pq}\right)^2 + \dfrac{(p+q)^2}{4pq} \leq \dfrac{(p+q)^2}{4pq}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(t_k - p)(t_k - p) = 0 \text{ với } k = 1, 2, \ldots, n \text{ và } A = \frac{2pq}{p+q}.$$

Ví dụ 1.4 (Đề thi học sinh giỏi năm 1976)**.** Cho $x_1 = 2; x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5^{x_n}}$.

Chứng minh rằng $\forall n > 1$ ta có $\dfrac{1}{5} \leq x_n < 2$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái, vế phải. Tìm điều kiện đơn điệu của x_n.

Ví dụ 1.5 (Đề thi học sinh giỏi Hungary)**.** Chứng minh rằng, nếu α là góc nhọn thì

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy .

1.2 Bất đẳng thức AM-GM và các bài toán liên quan

Trong bài này, ta sẽ đề cập đến định lí về bất đẳng thức giá trị trung bình cộng và giá trị trung bình nhân (Còn gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc ngắn gọn là bất đẳng thức AG), các bài toán liên quan và bất đẳng thức AG suy rộng.

Định lý 1.2 (Định lí về các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân ([2],[5]))**.** *Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AG là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hòa. (Gọi và viết tắt là GM - HM hoặc GH).

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức GH)**.** *Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta đều có*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AG đối với bộ số dương $x_k = \dfrac{1}{a_k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, ta có ngay bất đẳng thức GH.

Cho đến nay, người ta đã biết đến hàng trăm cách khác nhau để chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân (Gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc AG). Sau đây là một cách chứng minh định lí 1.2 theo quy nạp kiểu Cauchy. Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821. Để chứng minh định lí 1.2, một số người đã lợi dụng tình huống này để gọi tên bất đẳng thức (1.3) là bất đăng thức Cauchy. Tuy nhiên, cho đến nay, theo thông lệ Quốc tế và theo cách gọi của các nhà khoa học thì (1.3) là bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng (trung bình số học) và trung bình nhân (trung bình hình học).

1.2.1 Quy nạp kiểu Cauchy

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geq 2u_1u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \text{ không âm }. \tag{1.5}$$

Thay x_1, x_2 lần lượt bằng các biến mới $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và $\dfrac{x_3 + x_4}{2}$, từ (1.5) ta nhận được

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \left[\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \geq = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Tiếp tục quá trình như trên, ta thấy bất đẳng thức (1.3) đúng với $n = 2, 4, \ldots$ và nói chung, đúng với n là lũy thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (1.3) đúng với n $(n > 1)$ thì nó cũng đúng với $n - 1$. Thay x_n trong (1.3) bởi $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}$ và giữ nguyên các biến x_i khác, từ (1.3) ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq$$

$$\geq (x_1x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1} \geq (x_1x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2 \cdots x_{n-1}}.$$