ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẢI ANH

ĐỊNH LÍ TÁCH VỚI ĐIỀU KIỆN VỀ PHẦN TRONG TỰA TƯƠNG ĐỐI VÀ ÁP DỤNG CHO ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐỐI NGẪU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẢI ANH

ĐỊNH LÍ TÁCH VỚI ĐIỀU KIỆN VỀ PHẦN TRONG TỰA TƯƠNG ĐỐI VÀ ÁP DỤNG CHO ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU VÀ ĐỐI NGẪU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60. 46. 01. 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học
PGS. TS ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối và áp dụng cho lý thuyết đối ngẫu **3**

1.1 Phần trong tựa tương đối 3

1.2 Định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối 8

1.3 Áp dụng cho đối ngẫu của bài toán tối ưu đơn mục tiêu 10

2 Các điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức Ky Fan mở rộng với các ràng buộc nón **15**

2.1 Điều kiện tối ưu 15

2.2 Áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ yếu 23

2.3 Áp dụng cho đối ngẫu của bài toán tối ưu vectơ yếu . . 25

Kết luận **29**

Tài liệu tham khảo **30**

Mở đầu

Trong giải tích lồi và nhiều lĩnh vực khác như giải tích hàm, giải tích phi tuyến, tối ưu hóa ..., các định lí tách hai tập lồi có một vị trí rất quan trọng. Trong giải tích lồi, có hai định lí tách chính, (xem [1]). Trong định lí tách thứ nhất ta sử dụng điều kiện một trong hai tập lồi phải có phần trong khác rỗng. Câu hỏi được đặt ra là: Nếu phần trong của cả hai tập lồi đều bằng rỗng thì liệu có thể tách được hai tập lồi không tương giao trong không gian vô hạn chiều hay không? Câu trả lời là có. Mới đây, Cammaroto và Di Bella [5] đã chứng minh một định lí tách mới dựa trên khái niệm phần trong tựa tương đối để thay thế cho phần trong. Điều này dẫn đến các kết quả mới về điều kiện tối ưu và đối ngẫu. Đây là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì thế tôi chọn đề tài: " Định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối và áp dụng cho điều kiện tối ưu và đối ngẫu".

Luận văn trình bày định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối và áp dụng trong lý thuyết các điều kiện tối ưu và đối ngẫu.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối và áp dụng cho lý thuyết đối ngẫu

Trình bày các kết quả về phần trong tựa tương đối của Borwein - Lewis [2] và các kết quả của Cammaroto - Di Bella [5] về định lí tách, trong đó phần trong được thay thế bằng phần trong tựa tương đối và áp dụng cho đối ngẫu của bài toán tối ưu có ràng buộc trong trường hợp lồi vô hạn chiều với một điều kiện chính quy thay thế cho điều

kiện Slater thông thường.
Chương 2. Các điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức Ky Fan mở rộng với các ràng buộc nón

Trình bày các kết quả của Capătă [6] về các điều kiện cần và đủ để một điểm là nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan mở rộng với ràng buộc nón và affine bằng cách sử dụng định lí tách dựa trên phần trong tựa tương đối. Chương 2 cũng trình bày các kết quả được áp dụng cho bài toán tối ưu vectơ với ràng buộc nón và affine và các kết quả về đối ngẫu của bài toán tối ưu vectơ yếu.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Đỗ Văn Lưu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Thầy trong suốt quá trình em thực hiện luận văn.

Em xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ em trong suốt thời gian học tập tại trường.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ em trong quá trình học tập của mình.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn. Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 23 tháng 07 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Hải Anh

Chương 1

Định lí tách với điều kiện về phần trong tựa tương đối và áp dụng cho lý thuyết đối ngẫu

Chương 1 trình bày các kết quả về phần trong tựa tương đối của Borwein - Lewis [2] và các kết quả của Cammaroto - Di Bella [5] về định lí tách, trong đó phần trong được thay thế bằng phần trong tựa tương đối và áp dụng cho đối ngẫu của bài toán tối ưu có ràng buộc trong trường hợp lồi vô hạn chiều với một điều kiện chính quy thay thế cho điều kiện Slater thông thường.

1.1 Phần trong tựa tương đối

Trong các bài toán tối ưu lồi vô hạn chiều, có thể xảy ra trường hợp các định lí tách thông thường không thể sử dụng được, chẳng hạn, phần trong của hình nón dương trong L^p,

$$C = \{u \in L^p(T, \mu) : u(t) \geq 0, h.k.n\},$$

là rỗng. Vì lý do này, với một tập lồi, Borwein và Lewis [2] đã xây dựng khái niệm về phần trong tựa tương đối. Đó là sự mở rộng của khái niệm phần trong tương đối trong không gian hữu hạn chiều.

Chúng ta sẽ bắt đầu với các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. Cho một không gian vectơ X và tập $C \subset X$, ta kí hiệu nón sinh bởi C là:

$$coneC = \{\lambda x \mid x \in C, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}.$$

Nhắc lại [1]: Phần trong tương đối (relative interior) của tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là phần trong của A trong $aff\,A$, kí hiệu là riA, trong đó $aff\,A$ là bao affine của tập A.

Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.1.

Giả sử $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Khi đó, $\bar{x} \in riC$ nếu và chỉ nếu $cone(C - \bar{x})$ là một không gian con.

Chứng minh.

Giả sử $\bar{x} \in riC$. Khi đó, với lân cận N của $\bar{x}$ ta có:

$$N \cap affC \subset C.$$

Do đó, $cone(C - \bar{x}) = affC - \bar{x}$ và là một không gian con.

Mặt khác, giả sử $\bar{x} \notin riC$. Khi đó có thể tách hoàn toàn $\bar{x}$ với C: $\exists y \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$y^T\bar{x} \leq y^T x, \forall x \in C,$$

và bất đẳng thức chặt xảy ra với $\widehat{x}$ nào đó thuộc C ([10], Định lí 11.3). Như vậy,

$$y^T z \geq 0, \forall z \in cone(C - \bar{x}),$$

và

$$\widehat{x} - \bar{x} \in cone(C - \bar{x}).$$

Nhưng $\bar{x} - \widehat{x} \notin cone(C - \bar{x})$, cho nên $cone(C - \bar{x})$ không là một không gian con. $\square$

Kí hiệu clC là bao đóng của tập C.

Bổ đề 1.1.1.

Giả sử $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi. Khi đó, C là một không gian con nếu và chỉ nếu clC là một không gian con.

Chứng minh.

Nếu C là một không gian con thì $clC = C$. Ngược lại, nếu $C \neq clC$ và clC là một không gian con thì C nằm trong nửa không gian đóng của clC ([10], Hệ quả 11.5.2), mà điều này là không thể. □

Do đó, trong mệnh đề 1.1.1, ta có thể thay thế bằng $cone(C - \bar{x})$ đóng. Điều này dẫn đến định nghĩa về phần trong tựa tương đối. Từ đây, X sẽ là một không gian vectơ tôpô Hausdorff và X^* là không gian tôpô đối ngẫu gồm tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X. Phần tử không của X^* được kí hiệu là θ_{X^*}.

Định nghĩa 1.1.1. [2]

Giả sử C là một tập con lồi của X. Phần trong tựa tương đối (quasi relative interior) của C là tập các phần tử $x \in C$ mà $cl(cone(C - x))$ là một không gian con tuyến tính của X và được kí hiệu là $qriC$.

Nón pháp tuyến của C tại $\bar{x} \in C$ được định nghĩa như sau:

$$N_C(\bar{x}) := \{\phi \in X^* : \phi(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Bây giờ, chúng ta nhắc lại một số tính chất hữu ích liên quan đến phần trong tựa tương đối, xem [2] và [3].

Định lí 1.1.1. [2]

Giả sử C là một tập con lồi của X và $\bar{x} \in C$. Khi đó, $\bar{x} \in qriC$ nếu và chỉ nếu $N_C(\bar{x})$ là một không gian con tuyến tính của X^*.

Chứng minh.

Giả sử $K \subset X$ và K là một nón, cực của K được xác định như sau:

$$\begin{aligned} K^o &= \{\phi \in X^* \mid \phi(x) \leq 1, \forall x \in K\} \\ &= \{\phi \in X^* \mid \phi(x) \leq 0, \forall x \in K\}. \end{aligned}$$

Tương tự, với nón $L \subset X^*$, ta có:

$${}^oL = \{x \in X \mid \phi(x) \leq 0, \forall \phi \in L\}.$$

Ngay lập tức ta thấy rằng: nếu K là một không gian con thì ta có K^o cũng là một không gian con. Nếu L là một không gian con thì ta có ${}^{o}L$ cũng là một không gian con.

Bây giờ, ta có: Với $\phi \in X^*$, $\phi(x - \bar{x}) \leq 0$, với mọi $x \in C$ nếu và chỉ nếu $\phi(u) \leq 0$, với mọi $u \in cl(cone(C - \bar{x}))$, do tính liên tục của ϕ. Vậy,

$$N_C(\bar{x}) = cl(cone(C - \bar{x}))^o.$$

Mặt khác, theo định lí lưỡng cực (xem [9]), ta có:

$$\begin{aligned} {}^{o}N_C(\bar{x}) &= {}^{o}(cl(cone(C - \bar{x}))^o) \\ &= cl(cone(\{0\} \cup cl(cone(C - \bar{x})))) \\ &= cl(cone(C - \bar{x})). \end{aligned}$$

Vậy, định lí được chứng minh. □

Định lí 1.1.2. [5]

Giả sử C và D là 2 tập con lồi của X sao cho $qriC \neq \emptyset$, $qriD \neq \emptyset$ và $x_0 \in C$, $\bar{x} \in qriC$, $\alpha \in \mathbb{R}$ và $\lambda \in [0, 1)$. Khi đó,

(a) $qriC + qriD \subseteq qri(C + D)$,

(b) $\alpha qriC = qri(\alpha C)$,

(c) $qri(C \times D) = qriC \times qriD$,

(d) $cl(qriC) = cl(C)$,

(e) $(1 - \lambda)x_0 + \lambda\bar{x} \in qriC$,

(f) $qriC = qri(qriC)$,

(g) $qri(C - x) = qriC - x$ ($\forall x \in X$),

(h) $cl[cone(qriC)] = cl(coneC)$, nếu $qriC \neq \emptyset$.

Để làm rõ hơn về khái niệm phần trong tựa tương đối chúng ta nhắc lại các định nghĩa sau (xem [6]).

Định nghĩa 1.1.2.

Giả sử C là tập con lồi của X.

(i) Hạch (core) của C là

$$coreC := \{x \in C \mid cone(C - x) = X\}.$$

(ii) Hạch chắc chắn (intrinsic core) của C là

$$irc(C) := \{x \in C \mid cone(C - x)$$
$$\text{là không gian con tuyến tính của } X\,\}.$$

(iii) Phần trong tựa tương đối mạnh (strong - quasi relative interior) của C là

$$sqriC := \{x \in C \mid cone(C - x)$$
$$\text{là không gian con tuyến tính đóng của } X\,\}.$$

(iv) Tựa phần trong (quasi - interior) của C là

$$qiC := \{x \in C \mid cl[cone(C - x)] = X\}.$$

Các bao hàm sau đúng (xem [6]):

$$intC \subseteq coreC \subseteq sqriC \subseteq icrC \subseteq qriC \subseteq C,$$

và

$$intC \subseteq coreC \subseteq qiC \subseteq qriC \subseteq C.$$

Nếu X là hữu hạn chiều thì

$$qriC = sqriC = icrC = riC,$$

và

$$coreC = qiC = intC,$$

trong đó, riC là phần trong tương đối của C, nghĩa là phần trong của C trong bao affine của nó.

Định lí 1.1.3.

Giả sử X là không gian lồi địa phương có thứ tự bộ phận được xác định bởi nón lồi C với $cl(C - C) = X$ và X^* được xác định thứ tự bộ phận bởi C^*. Khi đó, $\bar{x} \in qriC$ nếu và chỉ nếu $\phi(\bar{x}) > 0$ với mọi $\phi \in X^* \setminus \{0\}$.

Chứng minh.

Giả sử $\bar{x} \in qriC$, nhưng với $\phi \in C^*$, $\phi \neq 0$ ta có: $\phi(\bar{x}) = 0$.
Khi đó,

$$-\phi(x - \bar{x}) \leq 0, \text{ với mọi } x \in C.$$