ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ MINH PHẤN

ĐỀ TÀI

PHÉP BIẾN ĐỔI MELLIN VÀ CÁC TOÁN TỬ TOEPLITZ GIAO HOÁN

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn: PGS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu

Thái Nguyên - 2010

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và thành kính nhất đến thầy, thầy không chỉ hướng dẫn tôi nghiên cứu khoa học mà Thầy còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Cũng nhân dịp này tôi xin chân thành cảm ơn gia đình và bạn bè tôi đã hết sức quan tâm và giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo Đại học Sư Phạm Hà Nội, viện Toán học Việt Nam và các thầy cô giáo trong khoa sau Đại học, Đại học Sư Phạm Thái Nguyên, Đại Học Thái Nguyên đã dạy bảo tôi tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2010

Học viên

Lê Minh Phấn

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

Toán tử Toeplitz giao hoán đã được nghiên cứu trong không gian Hardy bởi những kết quả cổ điển của Brown và Halmol. Gần đây Zeljko Cuckovic và N.V. Rao đã nghiên cứu và phát biểu bài toán này trong không gian Bergman thông qua phép biến đổi Mellin. Cụ thể hơn, các tác giả đã chứng minh được kết quả cơ bản sau :

Cho φ và ψ là các hàm điều hòa bị chặn trên $\mathbb{D}$. $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ nếu và chỉ nếu:

1, φ và ψ là chỉnh hình trong $\mathbb{D}$

2, $\bar{\varphi}$ à $\bar{\psi}$ là chỉnh hình trong $\mathbb{D}$

3, Tồn tại $a, b \in \mathbb{C}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sao cho $a\varphi + b\psi$ là hằng số trong $\mathbb{D}$

Rõ ràng nếu φ và ψ là chỉnh hình trong $\mathbb{D}$, $\bar{\varphi}$ và $\bar{\psi}$ là chỉnh hình trong $\mathbb{D}$, tồn tại $a, b \in \mathbb{C}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sao cho $a\varphi + b\psi$ là hằng số trong $\mathbb{D}$ khi và chỉ khi $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$.

Một câu hỏi tự nhiên khác là khi φ, ψ biểu diễn dưới dạng tọa độ cực

$$\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r) \quad \text{và} \quad \varphi(re^{i\theta}) = r^m e^{i\delta\theta}$$

thì điều kiện T_φ, T_ψ giao hoán được diễn tả như thế nào.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả nói trên của Cuckovic và Rao .

Luận văn bao gồm 2 chương.

Chương 1, trước hết chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về hàm chỉnh hình, không gian Bergman, phép biến đổi Mellin. Chúng là những công cụ cơ bản nhất cho những nghiên cứu được trình bày trong luận văn.

Chương 2 là một chương quan trọng của luận văn. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu toán tử Toeplitz giao hoán thông qua phép biến đổi Mellin. Phần đầu chương trình bày điều kiện cần và đủ để toán tử Toeplitz giao hoán với các symbol φ, ψ là các hàm điều hòa. Phần tiếp theo chúng tôi trình bày các kết quả về điều kiện cần và đủ để toán tử Toeplitz giao hoán thông qua phép biến đổi Mellin với $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ và $\hat{\psi}_k$ là hữu tỉ, vô tỉ.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm đề tài không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Chương 1

HÀM CHỈNH HÌNH, KHÔNG GIAN BERGMAN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI MELLIN

Trong chương này tôi trình bày một số kiến thức cơ sở, đặc biệt là các kiến thức sử dụng cho việc chứng minh chương sau. Một số kiến thức quan trọng như khái niệm hàm chỉnh hình, lý thuyết tích phân của hàm chỉnh hình, chuỗi Taylor, chuỗi Laurent trong không gian phức, không gian Bergman, phép biến đổi Mellin.

1.1. Hàm chỉnh hình

1.1.1 Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên miền $\Omega \in \mathbb{C}$. Xét giới hạn

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad \text{với} \quad z, z+\Delta z \in \Omega.$$

Nếu tại diểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z, ký hiệu $f'(z)$ hay $\dfrac{df}{dz}(z)$

Như vậy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$- khả vi tại z.

Bởi vì

$$\lim_{\Delta z \to 0} [f(z+\Delta z) - f(z)] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \Delta z = 0$$

nên nếu f là $\mathbb{C}$- khả vi tại z thì

$$\lim_{\Delta z \to 0} [f(z+\Delta z) - f(z)] = 0.$$

Nói cách khác f liên tục tại z.

Cũng như đối với hàm biến thực, bởi quy nạp ta viết

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

nếu vế phải tồn tại và gọi là đạo hàm phức cấp k của f trên Ω.

1.2. Điều kiện Cauchy - Riemann

Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x + iy$ xác định trên miền $\Omega \in \mathbb{C}$. Hàm f được gọi là $\mathbb{R}^2$- khả vi tại $z = x+iy$ nếu hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) (theo định nghĩa đã biết trong giải tích thực).

1.2.1 Định lý. *Để hàm f $\mathbb{C}$- khả vi tại $z = x+iy \in \Omega$ điều kiện cần và đủ là f $\mathbb{R}^2$- khả vi tại z và điều kiện Cauchy - Riemann sau được thỏa mãn tại z.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

***Chứng minh*. Điều kiện cần:**

Giả sử f $\mathbb{C}$ - khả vi tại $z = x+iy \in \Omega$. Khi đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{với} \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Vì nếu giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách tiến đến điểm 0 của Δz nên nếu chọn $\Delta z = \Delta x$, ta có :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

tức là u và v có đạo hàm riêng theo x tại (x,y) và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \tag{1.2.2}$$

Tương tự bằng cách chọn $\Delta z = i\Delta y$ ta có

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \tag{1.2.3}$$

So sánh (1.2.2) và (1.2.3) ta được $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$

Ta còn phải chứng tỏ $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y).

Vì f $\mathbb{C}$- khả vi tại z nên

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(\Delta z)$$

với $o(\Delta z)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δz, tức là

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta x} = 0.$$

Rõ ràng

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v, \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

theo (1.2.2) ta có

$$\Delta u + i\Delta v = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) + io(\Delta z)$$

Từ đó

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|).$$

điều kiện đó nghĩa là u và v khả vi tại (x,y).

Điều kiện đủ:

Vì u và v khả vi tại (x,y) nên

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

và

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Theo điều kiện (1.2.1) hai đẳng thức này có thể viết thành

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(|\Delta z|) \tag{1.2.4}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(|\Delta z|) \tag{1.2.5}$$

Từ (1.2.4) và (1.2.5) ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u}{\Delta z} + i\frac{\Delta v}{\Delta z} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} + i\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta z} + \frac{\frac{-\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}}{\Delta z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

tức là f $\mathbb{C}$- khả vi tại $z = x + iy$. □

1.2.2 Nhận xét. (1.) Giả sử f là $\mathbb{R}^2$-khả vi tại $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$

Xét vi phân
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.2.6}$$
Vì $dz = dx + idy$ và $d\bar{z} = dx - idy$ nên
$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}).$$
Thế các đẳng thức này vào (1.2.6) ta có
$$df = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z}.$$
Nếu đặt
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) \tag{1.2.7}$$
thì
$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \tag{1.2.8}$$
Bởi vì
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})]$$
nên f thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại z nếu và chỉ nếu
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$
Nói cách khác hàm $\mathbb{R}^2$-khả vi f tại z là C-khả vi nếu và chỉ nếu
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$
(2.) Từ (1.2.1) và (1.2.2) và nhận xét trên, nếu f $\mathbb{C}$-khả vi tại z thì ta có
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z) &= \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z)] \\ &= \frac{1}{2}[2\frac{\partial u}{\partial x}(z) + 2i\frac{\partial v}{\partial x}(z)] = \frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z) = f'(z).\end{aligned}$$