ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

-----------------o0o------------------

NGUYỄN THỊ LINH CHI

TẬP LỒI YẾU VÀ TỐI ƯU HOÁ TRÊN TẬP LỒI YẾU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

MỤC LỤC

Trang

Mục lục……………………………………………………………………… 1

Mở đầu.. 2

Chương 1

CÁC TẬP LỒI YẾU VÀ LỒI MẠNH

1.1. Các định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu... 4

1.2. Tính chất của đoạn lồi mạnh.. 8

1.3. Tính chất của tập lồi yếu.. 37

1.4. Tính liên thông địa phương của tập lồi yếu theo nghĩa Vial........... 45

Chương 2

CÁC HÀM LỒI YẾU, MẠNH VÀ TỐI ƯU HOÁ TRÊN TẬP LỒI YẾU

2.1. Các hàm lồi yếu, lồi mạnh.. 53

2.2. Cực tiểu hàm lồi mạnh trên tập lồi yếu... 61

KẾT LUẬN.. 67

TÀI LIỆU THAM KHẢO... 68

MỞ ĐẦU

Giải tích lồi đóng một vai trò quan trọng trong toán học ứng dụng đặc biệt là lí thuyết tối ưu hoá. Nhiều lớp hàm lồi suy rộng được nghiên cứu để giải quyết nhiều vấn đề được đặt ra trong lí thuyết các bài toán cực trị.

N.V. Ephimov và S.B. Schetkin (1959) đã đưa ra khái niệm tập
□ - lồi mà sau này trong [1] G.E. Ivanov gọi là tập lồi yếu với hằng số
$R > 0$. J.P. Vial (1982) đã đưa ra khái niệm tập lồi yếu mà trong [1] gọi là tập lồi yếu theo nghĩa Vial. Lớp các tập lồi mạnh được B.T. Poliak (1983) đưa vào nghiên cứu trong [4] và E.S. Polovinkin – M.V. Balasov nghiên cứu trong [3]. Các nghiên cứu về các tập và hàm lồi yếu và mạnh cùng với nhiều ứng dụng được trình bày một cách hệ thống trong cuốn sách chuyên khảo của G.E. Ivanov [1].

Luận văn trình bày các nghiên cứu về các tập lồi yếu theo nghĩa Vial và Ephimov – Schetkin, các tập lồi mạnh, đoạn lồi mạnh, các hàm lồi yếu và lồi mạnh cùng với một số áp dụng về tính chất nghiệm của bài toán cực tiểu một hàm lồi mạnh trên một tập lồi yếu.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các tính chất của tập lồi mạnh, đoạn lồi mạnh, các tập lồi yếu theo nghĩa Vial và Ephimov – Schetkin và mối quan hệ giữa chúng. Kết quả chỉ ra rằng trong không gian Hilbert, một tập đóng lồi yếu theo nghĩa Vial với hằng số $R > 0$ bất kì thì lồi. Còn một tập lồi yếu theo nghĩa Ephimov – Schetkin với hằng số $R > 0$ bất kì thì không nhất thiết lồi mà chỉ đóng. Một tập đóng lồi yếu theo nghĩa Vial với hằng số $R > 0$ thì liên thông.

Chương 2 trình bày một số kết quả về hàm lồi yếu , lồi mạnh và tính chất điểm cực tiểu của bài toán cực tiểu hàm lồi mạnh trên tập lồi yếu theo nghĩa Vial.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp Cao học Toán K16 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2010

Nguyễn Thị Linh Chi

Chương 1

CÁC TẬP LỒI YẾU VÀ LỒI MẠNH

Chương 1 trình bày các tính chất của tập lồi mạnh, đoạn lồi mạnh, các tập lồi yếu theo nghĩa Vial và Ephimov – Schetkin và mối quan hệ giữa chúng. Chú ý rằng một tập đóng lồi yếu theo nghĩa Vial với hằng số R> 0 bất kì thì lồi, còn một tập lồi yếu theo nghĩa Ephimov – Schetkin với hằng số R > 0 bất kì thì không nhất thiết lồi mà chỉ đóng.

1.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA TRỰC TIẾP VÀ ĐỐI NGẪU

Định nghĩa1.1.1

Tập hợp A trong không gian tuyến tính được gọi là tập lồi nếu với hai điểm bất kỳ $x_0, x_1 \in A$,

$$[x_0; x_1] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0 : \lambda \in [0;1]\} \subset A.$$

Định nghĩa này sẽ được gọi là định nghĩa trực tiếp của tập lồi.

Giả sử E là không gian vectơ tôpô và E^* là không gian đối ngẫu tôpô của E. Kí hiệu $\langle p, x\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $p \in E^*$ tại $x \in E$ hay tích vô hướng của p và x trong trường hợp nếu E là không gian Euclide

Định lý1.1.1 ([1])

Tập A trong không gian lồi địa phương E là lồi và đóng khi và chỉ khi tồn tại họ các nửa không gian

$$S_\alpha = \{x \in E : \langle p_\alpha, x\rangle \le c_\alpha\}$$

sao cho

$$A = \bigcap_{\alpha \in A_1} S_\alpha \quad ,$$

ở đây $p_\alpha \in E^*, c_\alpha \in \mathbf{R}$*, chỉ số α chạy trên tập tuỳ ý* A_1.

Nếu tập A có dạng là tương giao của các nửa không gian thì ta nói A thoả mãn định nghĩa đối ngẫu của tập lồi. Định lý 1.1.1 khẳng định rằng với các tập hợp đóng trong không gian lồi địa phương thì định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu của tập lồi là tương đương.

Sau đây ta sẽ khảo sát các định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu của các tập lồi mạnh và lồi yếu.

Định nghĩa1.1.2

Cho $R \geq 0$ *và vectơ a trong không gian định chuẩn* E*. Ký hiệu* $B_R(a)$ *là hình cầu đóng tâm a bán kính R*

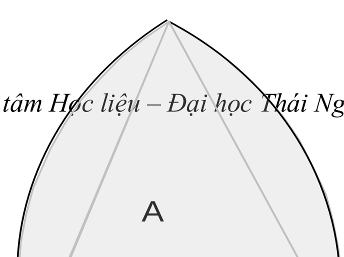
$$B_R(a) = \left\{ x \in E : \|x - a\| \leq R \right\}.$$

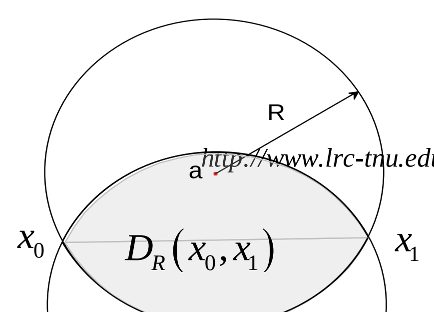
Kí hiệu B_R *là* $B_R(0)$ *(hình cầu đóng tâm O bán kính R).*

Định nghĩa1.1.3

Tập hợp A *trong không gian định chuẩn E được gọi là lồi mạnh với hằng số R > 0 , nếu tồn tại tập khác rỗng* $A_1 \subset E$ *sao cho:*

$$A = \bigcap_{a \in A_1} B_R(a)$$





Định nghĩa1.1.4

Giả sử trong không gian định chuẩn E *cho hai điểm* x_0, x_1, *cho số* $R \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. *Tập hợp*

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset B_R(a)} B_R(a)$$

được gọi là đoạn lồi mạnh.

Nhận xét 1.1.1

Từ định nghĩa 1.1.3, 1.1.4 suy ra tập hợp $D_R(x_0, x_1)$ lồi mạnh với hằng số *R*. Điều này giải thích tại sao ta gọi là "đoạn lồi mạnh".

Định lý1.1.2 ([3])

Giả sử trong không gian Hilbert H *cho tập đóng* A *và số R > 0. Các khẳng định sau đây là tương đương:*

(i) *Tập hợp* A *lồi mạnh với hằng số R.*

(ii) *Với mọi* $x_0, x_1 \in A$ *thì* $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$ *và* $D_R(x_0, x_1) \subset A$.

Tương tự các định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu của tập hợp lồi thì điều kiện (ii) của định lý 1.1.2 gọi là " trực tiếp ", còn định nghĩa 1.1.3 là định nghĩa “ đối ngẫu ”. Định lý 1.1.2 thiết lập sự tương đương của các định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu của tập lồi mạnh.

Định nghĩa1.1.5

Tập hợp A trong không gian định chuẩn được gọi là lồi yếu theo nghĩa Vial với hằng số R > 0, nếu với $\forall x_0, x_1 \in A$ *mà* $0<\|x_1 - x_0\|<2R$ *thì* $\exists x \in A \bigcap D_R\left(x_0 x_1\right)$ *không trùng với các điểm* x_0, x_1.

Giả sử trong không gian định chuẩn cho hai điểm x_0, x_1 và cho số $R \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Cùng với đoạn lồi mạnh $D_R\left(x_0, x_1\right)$ ta định nghĩa đoạn lồi mạnh không có các điểm mút.

$$\overset{\circ}{D}_R\left(x_0, x_1\right) = D_R\left(x_0, x_1\right) \setminus \left\{x_0, x_1\right\}.$$

Nhận xét 1.1.2

Tập hợp A trong không gian định chuẩn là lồi yếu theo nghĩa Vial với hằng số R khi và chỉ khi với hai điểm bất kì $x_0, x_1 \in A$ sao cho

$$0<\|x_1 - x_0\|<2R \text{ thì } A \bigcap \overset{\circ}{D}_R\left(x_0, x_1\right) \neq \varnothing.$$

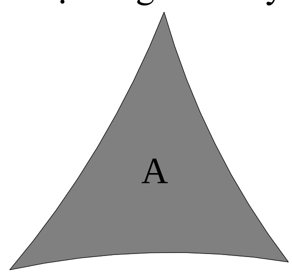
Kí hiệu: $\operatorname{int} A, clA, \partial A, A^c$ lần lượt là phần trong, bao đóng, biên, phần bù của tập hợp A.

N.V. Ephimov và S.B. Schetkin đã đưa ra khái niệm tập “A - lồi”. Các tập hợp này sẽ gọi là lồi yếu theo Ephimov - Schetkin.

Định nghĩa1.1.6

Tập hợp A trong không gian định chuẩn E được gọi là lồi yếu theo nghĩa Ephimov - Schetkin với hằng số R > 0 nếu tồn tại một tập hợp khác rỗng $A_1 \subset E$ sao cho $A = \bigcap_{a \in A_1} \left(\operatorname{int} B_R(a)\right)^c$.

Tương tự cũng với các định nghĩa trực tiếp và đối ngẫu của các tập lồi và lồi mạnh thì ta gọi định nghĩa của Vial là trực tiếp còn định nghĩa của Ephimov - Schetkin là định nghĩa lồi yếu đối ngẫu .



Hình 3

Hình 3 minh hoạ tập hợp lồi yếu theo Vial và theo Ephimov - Schetkin.

Sau đây ta chỉ ra rằng trong không gian Hilbert H , tính đóng và tính lồi yếu theo nghĩa Vial của tập $A \neq H$ kéo theo tính lồi yếu theo Ephimov - Schetkin của A nhưng điều ngược lại không đúng.

1.2 TÍNH CHẤT CỦA ĐOẠN LỒI MẠNH

Mệnh đề 1.2.1

Giả sử trong không gian định chuẩn E cho các điểm x_0, x_1, y_0, y_1 sao cho $\|x_1 - x_0\| \le 2R$ và $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$. Khi đó,

$$D_R(y_0, y_1) \subset D_R(x_0, x_1).$$

Chứng minh

Lấy $x \in D_R(y_0, y_1)$. Giả sử $a \in E$ sao cho, $\{x_0, x_1\} \subset \mathcal{B}_R(a)$.

Vì $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$, nên $y_0, y_1 \in \mathcal{B}_R(a)$. Từ điều kiện $x \in D_R(y_0, y_1)$ suy ra $x \in \mathcal{B}_R(a)$.

Vì vậy,

$$x \in \bigcap_{a \in E : \{x_0, x_1\} \subset \mathcal{B}_R(a)} \mathcal{B}_R(a) = D_R(x_0, x_1). \qquad \square$$

Mệnh đề 1.2.2

Trong không gian Euclide E cho hai điểm x_0, x_1. Giả sử $R = \dfrac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. *Khi đó,*

$$D_R(x_0, x_1) = \mathcal{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

Chứng minh

Giả sử vectơ $a \in E$ sao cho $\{x_0, x_1\} \subset \mathcal{B}_R(a)$.

Khi đó, $\|x_0 - a\| \le R, \|x_1 - a\| \le R$. Vì vậy,

$$\begin{aligned} 4R^2 &= \|x_1 - x_0\|^2 = \|x_1 - a\|^2 + \|x_0 - a\|^2 - 2\langle x_1 - a, x_0 - a\rangle \\ &= 2\|x_1 - a\|^2 + 2\|x_0 - a\|^2 - \|x_0 + x_1 - 2a\|^2 \le 4R^2 - \|x_0 + x_1 - 2a\|^2 \quad . \end{aligned}$$

Do đó, $\|x_0 + x_1 - 2a\|^2 \le 0$, tức là $a = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

Vì vậy,

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a : \{x_0, x_1\} \subset \mathcal{B}_R(a)} \mathcal{B}_R(a) = \mathcal{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right). \qquad \square$$

Định nghĩa1.2.1