ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VĂN ĐỨC CHÍN

HÌNH HỌC XẠ ẢNH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VĂN ĐỨC CHÍN

HÌNH HỌC XẠ ẢNH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mở đầu

Hình học xạ ảnh là một môn hình học tổng quát sử dụng công cụ tuyến tính. Nhiều định lý hình học nổi tiếng cũng như nhiều bài toán hình học hay trở nên đơn giản dưới góc nhìn của hình học xạ ảnh. Vì vậy, sử dụng hình học xạ ảnh là công cụ hữu hiệu trong việc giải và sáng tạo các bài toán hình học sơ cấp.

Mục đích của luận văn là trình bày một số khái niệm trong mặt xạ ảnh, mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine và đặc biệt là ứng dụng hình học xạ ảnh để giải và sáng tạo một số định lý và bài toán trong hình học sơ cấp.

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong hai chương: Chương 1 - Cơ sở lý thuyết và Chương 2 - Ứng dụng hình học xạ ảnh trong hình học sơ cấp.

Trong chương 1, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở về mặt phẳng xạ ảnh và mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine. Mục đầu tiên của chương này giới thiệu khái niệm về mặt phẳng xạ ảnh P^2 liên kết với một không gian véc tơ thực 3 chiều V^3; mục tiêu và tọa độ xạ ảnh; khái niệm và phương trình đường thẳng trong P^2; tỷ số kép trong P^2 và đường bậc hai trong P^2. Trong mục tiếp theo, chúng tôi trình bày mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine. Mục cuối cùng của chương này giới thiệu về ánh xạ xạ ảnh, đặc biệt là phép chiếu xuyên tâm, và trình bày về tính đối ngẫu trong không gian xạ ảnh.

Chương 2 của luận văn trình bày về ứng dụng của mặt phẳng xạ ảnh và mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine vào việc giải và sáng tạo một số định lý và bài toán hình học sơ cấp.

Chọn trước một đường thẳng Δ trong mặt phẳng xạ ảnh P^2. Khi đó trên tập hợp $\mathbb{A}^2 = P^2 \setminus \Delta$ có cấu trúc mặt phẳng affine. Các điểm nằm trên đường thẳng Δ khi đó được gọi là các điểm vô tận. Từ một định lý hoặc một bài toán trong mặt phẳng xạ ảnh P^2, bằng cách chọn đường thẳng Δ thích hợp ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán khác nhau trong mặt phẳng affine. Luận văn trình bày việc chuyển đổi này đối với một số định lý nổi tiếng và một số bài toán trong mặt phẳng xạ ảnh. Với cách làm này, chúng ta thu được nhiều kết quả hay của hình học sơ cấp.

Trong phần cuối của chương 2, chúng tôi trình bày ứng dụng của tính đối ngẫu trong không gian xạ ảnh để sáng tạo các bài toán mới từ một số bài toán cho trước. Đồng thời, chúng tôi trình bày ứng dụng của phép chiếu xuyên tâm trong một số bài toán chứng minh hình học.

Do thời gian hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý từ quý thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Văn Đức Chín

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1 Mặt phẳng xạ ảnh

Ở mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về mặt phẳng xạ ảnh và một số yếu tố liên quan được sử dụng trong các phần tiếp theo của luận văn.

1.1.1 Định nghĩa

Cho V^3 là một không gian vectơ thực 3- chiều. Ta ký hiệu $[V^3]$ là tập hợp các không gian vectơ con một chiều của V^3. Một *mặt phẳng xạ ảnh thực liên kết với không gian* V^3 là một bộ ba (P, p, V^3), trong đó P là một tập khác rỗng và $p : [V^3] \longrightarrow P$ là một song ánh, kí hiệu P^2. Mỗi phần tử $A \in P^2$ được gọi là một điểm. Nếu điểm $M \in P^2, M = p(V^1)$ và $\vec{0} \neq \vec{x} \in V^3$, sao cho $V^1 = \langle \vec{x} \rangle$, khi đó ta gọi $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm M.

Nhận xét: Hai véc tơ cùng đại diện cho một điểm thì cộng tuyến với nhau. Hai véc tơ đại diện cho hai điểm phân biệt thì độc lập tuyến tính.

1.1.2 Mục tiêu và tọa độ xạ ảnh

Trong mặt phẳng xạ ảnh P^2 hệ điểm $\{M_1, M_2, M_3\}$ được gọi là hệ điểm độc lập nếu hệ các vectơ đại diện tương ứng của chúng $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ độc lập tuyến tính.

Hệ điểm $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ được gọi là một mục tiêu ứng với cơ sở đại diện $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ trong P^2 nếu $\{A_1, A_2, A_3\}$ độc lập và $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, trong đó $\vec{e} \neq \vec{0}$ là vectơ đại diện của E và $\vec{e}_i$ là vectơ đại diện cho A_i, với $i = 1, 2, 3$.

Giả sử $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là mục tiêu ứng với cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ và $M \in P^2$ có vectơ đại diện là $\vec{x}$. Khi đó, nếu $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ thì bộ ba $(x_1 : x_2 : x_3)$ được gọi là tọa độ điểm M đối với mục tiêu đã cho và ta viết $M(x_1 : x_2 : x_3)$.

1.1.3 Đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh

Cho V^2 là một không gian véc tơ con 2 chiều của không gian véc tơ V^3. Kí hiệu $[V^2]$ là tập tất cả các không gian véc tơ con 1 chiều của V^2. Khi đó tập hợp $p([V^2])$ được gọi là *đường thẳng* trong mặt phẳng xạ ảnh P^2, ký hiệu là P^1 hoặc Δ.

Giả sử đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt $M_1, M_2 \in P^2$ và điểm $X(x_1, x_2, x_3) \in \Delta$. Khi đó ta có

$$[X] = t_1[M_1] + t_2[M_2], \quad (t_1^2 + t_2^2 \neq 0),$$

với $[X], [M_1], [M_2]$ là các ma trận tọa độ cột của các điểm X, M_1, M_2. Từ đó ta có phương trình của Δ là $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (a_1, a_2, a_3 không đồng thời bằng 0). Bộ số (a_1, a_2, a_3) được gọi là tọa độ của đường thẳng Δ đối với mục tiêu đã chọn.

1.1.4 Tỉ số kép trong P^2

Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng: Trong P^2 với mục tiêu cho trước, cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D cùng thuộc một đường thẳng. Giả sử

$$[C] = k_1[A] + l_1[B]$$

$$\text{và} \quad [D] = k_2[A] + l_2[B].$$

Khi đó, *tỉ số kép của bốn điểm* A, B, C, D được ký hiệu là $[A, B, C, D]$ và được xác định bởi

$$[A, B, C, D] = \frac{l_1}{k_1} : \frac{l_2}{k_2}.$$

Nếu $[A, B, C, D] = -1$ ta nói A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa (hay cặp C, D chia điều hòa cặp điểm A, B).

Tỉ số kép của chùm bốn đường thẳng: Cho chùm bốn đường thẳng phân biệt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ trong P^2. Với mục tiêu cho trước, giả sử bốn đường thẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ có ma trận tọa độ lần lượt là $[\alpha], [\beta[, [\gamma[, [\delta[$. Ta có

$$[\gamma] = \mu_1[\alpha] + \lambda_1[\beta],$$

$$[\delta] = \mu_2[\alpha] + \lambda_2[\beta],$$

trong đó, $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ là các hệ số thực khác không. *Tỉ số kép của chùm bốn đường thẳng* trên được xác định bởi

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Nếu $[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = -1$ ta nói $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lập thành chùm đường thẳng điều hòa.

Nhận xét: nếu chùm bốn đường thẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bị cắt bởi một đường thẳng tương ứng tại bốn điểm A, B, C, D thì ta có $[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [A, B, C, D]$. Đặc biệt, nếu chùm bốn đường thẳng $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ điều hòa thì A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa.

1.1.5 Các đường bậc hai trong P^2

Một đường bậc hai trong P^2 là tập hợp S các điểm $X(x_1, x_2, x_3) \in P^2$, thỏa mãn phương trình

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

trong đó, a_{ij} là các hệ số không đồng thời bằng 0 và $a_{ij} = a_{ji}$, với $i, j = 1, 2, 3$.

Bằng cách chọn mục tiêu thích hợp, ta có thể đưa phương trình của một đường bậc hai trong P^2 về một trong năm dạng chuẩn tắc sau:

1. Đường Ôvan ảo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
2. Đường cônic $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
3. Cặp đường thẳng ảo $x_1^2 + x_2^2 = 0$.
4. Cặp đường thẳng phân biệt $-x_1 + x_2^2 = 0$.
5. Cặp đường thẳng trùng nhau $x_1^2 = 0$.

1.2 Mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine

Cho (và cố định) đường thẳng Δ trong mặt phẳng xạ ảnh P^2 với nền là không gian véc tơ thực 3 chiều V^3. Đặt $\mathbb{A}^2 = P^2 \backslash \Delta$. Chọn mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ của P^2 sao cho $\{A_1, A_2\} \in \Delta$. Khi đó đường thẳng Δ có phương trình $x_3 = 0$.

Giả sử $X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^2$ thì $x_3 \neq 0$. Đặt $X_1 = \dfrac{x_1}{x_3}$ và $X_2 = \dfrac{x_2}{x_3}$ thì bộ số (X_1, X_2) được gọi là tọa độ không thuần nhất của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh đã cho và ta viết $X = (X_1, X_2)$. Khi đó có một song ánh từ tập $\mathbb{A}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ bằng cách ta cho mỗi điểm thuộc $\mathbb{A}^2$ tương ứng với tọa độ không thuần nhất của nó. Gọi V^2 là không gian vectơ 2 chiều trên trường số thực $\mathbb{R}$ với cơ sở $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ và ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \longrightarrow V^2 \\ & (X, Y) \longrightarrow \varphi(X, Y) = \overrightarrow{XY} = \vec{v} = (Y_1 - X_1)\vec{a}_1 + (Y_2 - X_2)\vec{a}_2. \end{aligned}$$

Ta có

- $\forall X = (X_1, X_2) \in \mathbb{A}^2$ và $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V^2$. Khi đó có duy nhất điểm $Y(Y_1, Y_2)$, với $Y_1 = X_1 + v_1, Y_2 = X_2 + v_2$, thỏa mãn $\varphi(X, Y) = \vec{v}$.
- $\forall X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2), Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{A}^2$, $\varphi(X, Z) = \varphi(Z, Y) + \varphi(Y, X)$.

Điều này suy ra, $\mathbb{A}^2$ là một không gian affine liên kết với không gian véc tơ V^2. Ta gọi $\mathbb{A}^2$ là mô hình xạ ảnh của mặt phẳng affine.

1.2.1 Mục tiêu và tọa độ affine trong $\mathbb{A}^2$

Ta vẫn xét mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ trong P^2 như trên. Gọi E_1, E_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng A_1A_3, A_2A_3 với đường thẳng Δ. Tọa độ không thuần nhất của E_1, E_2 và A_3 là

$$E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1), A_3 = (0, 0).$$

Đặt $\overrightarrow{A_3E_1} = \vec{e}_1$ và $\overrightarrow{A_3E_2} = \vec{e}_2$ thì $\{A_3; E_1, E_2\}$ là một mục tiêu affine trong $\mathbb{A}^2$, được gọi là mục tiêu affine sinh bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$.

Khi đó, $\forall X = (X_1, X_2) \in \mathbb{A}^2$ ta có $\overrightarrow{A_3X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2$, tức là (X_1, X_2) là tọa độ affine của X đối với mục tiêu affine $\{A_3; E_1, E_2\}$.

1.2.2 Đường thẳng trong $\mathbb{A}^2$

Giả sử d_1 là đường thẳng trong P^2 và không trùng với Δ. Khi đó, $d'_1 = d_1 \backslash \Delta$ là một đường thẳng trong $\mathbb{A}^2$. Thật vậy, với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, giả sử đường thẳng d_1 có phương trình

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{1.2.1}$$

Vì d_1 là đường thẳng không trùng với Δ nên mỗi $X \in d_1, X = (x_1, x_2, x_3)$ thì $x_3 \neq 0$. Ta chia hai vế (1.2.1) cho x_3 thì tọa độ không thuần nhất của X thỏa mãn phương trình

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3 = 0 \tag{1.2.2}$$

Từ (1.2.2) suy ra d'_1 là đường thẳng trong $\mathbb{A}^2$.

Cho d_1, d_2 là hai đường thẳng phân biệt trong P^2 khác $\Delta, I = d_1 \cap d_2$ và trong $\mathbb{A}^2 = P^2 \backslash \Delta$ gọi d'_1, d'_2 là các đường thẳng tương ứng với d_1, d_2. Khi đó:

- nếu $I \in \Delta$ thì $d'_1 \| d'_2$;