ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ QUỐC HUY

PHÂN RÃ MỘT SỐ BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA VỀ DÃY CÁC BÀI TOÁN CẤP HAI NHỜ TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG, XÁC ĐỊNH DƯƠNG, COMPACT TRÊN KHÔNG GIAN SOBOLEV

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ QUỐC HUY

PHÂN RÃ MỘT SỐ BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA VỀ DÃY CÁC BÀI TOÁN CẤP HAI NHỜ TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG, XÁC ĐỊNH DƯƠNG, COMPACT TRÊN KHÔNG GIAN SOBOLEV

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ TÙNG SƠN

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn này là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trình bày trong luận văn là trung thực và chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo sự trung thực và chính xác, tuân thủ các quy định về quyền sở hữu trí tuệ.

Tác giả

Vũ Quốc Huy

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự đề xuất hướng nghiên cứu, động viên thường xuyên và tận tâm chỉ bảo nghiêm túc về chuyên môn của TS. Lê Tùng Sơn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo trong tổ Giải tích, các thầy cô giáo trong trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Hòa Bình, trường THPT Lạc Sơn – Hòa Bình đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các bạn bè, đồng nghiệp, gia đình và người thân đã động viên khuyến khích và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Học viên

Vũ Quốc Huy

MỤC LỤC

BẢNG KÍ HIỆU

$\mathbf{R}^n$ - Không gian $Euclide$ n chiều.

Ω - Miền giới nội trong không gian $\mathbf{R}^n$.

$\partial\Omega$ - Biên trơn Lipschitz.

$C^k(\Omega)$ - Không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục.

$C_0^\infty(\Omega)$ - Không gian các hàm khả vi vô hạn lần có giá compact.

$L^2(\Omega)$ - Không gian các hàm đo được bình phương khả tích.

$H^s(\Omega)$ - Không gian Sobolev với chỉ số s.

$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ - Không gian Sobolev với chỉ số $\frac{1}{2}$.

$H^{-1}(\Omega)$ - Không gian đối ngẫu với $H_0^1(\Omega)$.

$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ - Không gian đối ngẫu với $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ - Không gian các hàm có vết bằng không trên $\partial\Omega$.

$\| \ \|_V$ - Chuẩn xác định trên không gian V.

$\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ - Tích vô hướng xác định trên không gian V.

$C_\lambda(\Omega)$ - Hằng số vết.

$C(\Omega)$ - Hằng số Poincare.

E - Ma trận đơn vị.

I - Toán tử đơn vị.

P_1 - Toán tử chiếu lên thành phần thứ nhất.

P_2 - Toán tử chiếu lên thành phần thứ hai.

MỞ ĐẦU

Phương trình đạo hàm riêng cấp cao mà tiêu biểu là phương trình song điều hòa và phương trình kiểu song điều hòa là các lớp phương trình mô tả nhiều bài toán trong cơ học, vật lý, kỹ thuật,…

Nhiều bài toán cơ học, chẳng hạn như bài toán về độ võng của bản mỏng dưới tác động của tỉ trọng (xem [24], [25]), các bài toán về lý thuyết đàn hồi phẳng (xem [11]), các bài toán về dòng chảy (xem [15], [21])… dẫn đến việc giải phương trình song điều hòa

$$\Delta^2 u = f, \qquad (1)$$

trong đó Δ là toán tử Laplace trên một miền nào đó với các điều kiện biên.

Các bài toán dẫn đến phương trình (1) đã và đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Đã có nhiều hướng tiếp cận khác nhau tới việc giải các bài toán biên cho các phương trình trên. Năm 2003, một bài tổng quan lớn của Meleshko (xem [20]) đã được đăng tải trên " Applied Mechanics Review" của Hội kỹ sư cơ học Mỹ, trong đó tác giả đã hệ thống, tổng kết khá nhiều phương pháp mà các nhà nghiên cứu cơ học đã sử dụng để giải bài toán song điều hòa hai chiều như phương pháp hàm Green, phương pháp hàm phức và một số phương pháp gần đúng giải tích như phương pháp chuỗi Fourier, phương pháp Ritz, phương pháp Bubnov – Galerkin với các hàm cơ sở được chọn là các hàm trơn đối với một số miền đặc biệt như hình chữ nhật, hình ellip,…

Trong khoảng thời gian gần ba chục năm trở lại đây, nhiều phương pháp mới hữu hiệu hơn cho việc giải phương trình (1) đã được nghiên cứu và phát triển trong các công trình của nhiều nhà toán học như phương pháp phần tử hữu hạn (xem [5]), phương pháp sai phân (xem [13], [14], [18], [25]).

Các phương trình kiểu song điều hòa

$$\Delta^2 u + bu = f, \ (b>0), \qquad (2)$$

$$\Delta^2 u - a\Delta u + bu = f, \ (a>0, b>0), \qquad (3)$$

mô tả sự uốn của bản trên nền đàn hồi cũng đã được Benzine (1988) (xem [3]), Katsikadelis và Kallivokas (1988) giải bằng phương pháp tích phân biên (xem [17]), Bjorstad và Bjorn (1997) trong [4] sau khi rời rạc hóa (3) với điều kiện biên $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ bằng phương pháp phổ Galerkin dựa trên đa thức được sự phát triển từ Shen, đã xây dựng được thuật toán O(N^3).

Ý tưởng đưa việc giải bài toán Dirichlet cho phương trình song điều hòa về dãy các bài toán đối với phương trình Poisson được thực hiện đầu tiên bởi Palsev (1966), Meller (1968) và Dorodnitsyn (1971) (xem [21], [22], [23]). Trong [16], Glowinski (1979) khi nghiên cứu việc giải lặp bài toán biên Dirichlet đối với phương trình song điều hòa

$$\Delta^2\psi = f,\ (x,y) \in \Omega$$

$$\psi\Big|_\Gamma = g_1, \frac{\partial\psi}{\partial n} = g_2,$$

trên miền giới nội $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ với biên $\partial\Omega = \Gamma$ mô tả sự uốn của bản đàn hồi, đã đưa bài toán trên về dãy các bài toán cấp hai. Năm 1994, trong [8], Đặng Quang Á khi nghiên cứu bài toán biên Dirichlet đối với phương trình kiểu song điều hòa

$$\begin{aligned} &Lu \equiv \varepsilon\Delta^2 u - a\Delta u + bu = f, x \in \Omega, \\ &u\Big|_\Gamma = g_{1,} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = g_{2,} \end{aligned} \qquad (4)$$

trong đó Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega = \Gamma$ đủ trơn, $\varepsilon > 0, a \geq 0, b \geq 0, a^2 - 4b\varepsilon \geq 0$ đã đưa được bài toán trên về dãy các bài toán cấp hai đối với phương trình elliptic

$$\begin{aligned} &L_2 v \equiv \mu\Delta v - \mathrm{b} = f, x \in \Omega, \\ &v\big|_\Gamma = v_{0,} \\ &L_1 u \equiv \frac{\varepsilon}{\mu}\Delta u - u = v, x \in \Omega, \\ &u\big|_\Gamma = u_0, \end{aligned}$$

trong đó $\mu = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}\right)$, Năm 1999, trong [11], Đặng Quang Á cũng đã có được những kết quả tương tự khi nghiên cứu các bài toán biên của phương trình song điều hòa với điều kiện biên hỗn hợp

$$\Delta^2 u = f, x \in \Omega,$$
$$u\big|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \Delta u\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

trong đó Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^m$ với biên đủ trơn, Γ_1 và Γ_2 là hai phần biên không giao nhau của Γ, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Gần đây hơn là các kết quả nghiên cứu của Đặng Quang Á, Lê Tùng Sơn năm 2006 đối với bài toán biên của phương trình kiểu song điều hòa với điều kiện biên không hỗn hợp

$$\Delta^2 u - a\Delta u + bu = f,\ x \in \Omega,$$
$$u\big|_{\Gamma} = g_0, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = g_1,$$

năm 2007 [12] đối với bài toán biên của phương trình kiểu song điều hòa với điều kiện biên hỗn hợp

$$\Delta^2 u + bu = f, x \in \Omega,$$
$$u\big|_{\Gamma} = g_0, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = g_1, \Delta u\big|_{\Gamma_2} = g_2,$$

vv,…

Theo hướng nghiên cứu các bài toán trên tôi chọn đề tài **''Phân rã một số bài toán biên của phương trình song điều hòa về dãy các bài toán cấp hai nhờ toán tử đối xứng, xác định dương, compact trên không gian Sobolev''.**

Nội dung luận văn gồm 2 chương:

Chương 1 trình bày hệ thống các kiến thức chuẩn bị, các kết quả bổ trợ bao gồm một số kiến thức cơ bản về không gian Sobolev, định tính của bài toán biên đối với phương trình elliptic cấp hai, định tính của bài toán biên đối với phương trình kiểu song điều hòa. Khối kiến thức cơ bản và các kết quả trong chương 1 được sử dụng và làm cơ sở cho các kết quả nghiên cứu trình bày trong chương 2.

Chương 2 đưa ra các kết quả nghiên cứu về việc phân rã hai bài toán cụ thể về dãy các bài toán cấp hai mà quan hệ nghiệm của bài toán gốc và nghiệm của bài toán phân rã được thông qua phương trình toán tử.