ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

−−−−−−−−−−

PHÙNG THỊ HƯƠNG

ĐỊNH LÝ NEVANLINNA-CARTAN P-ADIC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

––––––––––

PHÙNG THỊ HƯƠNG

ĐỊNH LÝ NEVANLINNA-CARTAN P-ADIC VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Hoài An. Luận văn chưa từng được công bố trong bất kì công trình nghiên cứu nào và mọi tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực.

Học viên

Phùng Thị Hương

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Khoa sau đại học, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Vũ Hoài An. Nhân dịp này, Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến Tiến sĩ Vũ Hoài An, người đã dành nhiều thời gian, tận tình, hướng dẫn giúp đỡ và tạo điều kiện để tôi hoàn thành tốt luận văn này.

Một lần nữa tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà toán học của Khoa Toán, Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học Việt Nam.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè và các thành viên trong lớp cao học K21B đã luôn ủng hộ và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các nhà khoa học và bạn đọc. Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2015

Tác giả

Phùng Thị Hương

Mục lục

Các kí hiệu

- $\mathbb{C}_p$: Trường số phức p-adic
- f : Hàm phân hình p-adic
- $N_f(a, r)$: Hàm đếm của f tại a
- $m_f(\infty, r)$: Hàm xấp xỉ của f
- $T_f(r)$: Hàm đặc trưng của f
- $O(1)$: Đại lượng giới nội
- $N_f(r), N_k(f, r)$: Hàm đếm, hàm đếm mức k
- $W(f)$ Wronskian của hàm f
- H_j: Siêu phẳng
- $F_j(z) = 0$: Phương trình của siêu phẳng

Mở đầu

Toán học được coi là đỉnh cao trí tuệ của con người, nó xâm nhập vào hầu hết các ngành khoa học là nền tảng của nhiều lý thuyết khoa học quan trọng. Toán học ngày càng phát triển mạnh mẽ qua từng thời kì. Đặc biệt trong đầu thế kỷ XX là sự ra đời của lý thuyết Nevanlinna, được coi là một trong những thành tựu nổi bật và sâu sắc nhất. Trọng tâm của lý thuyết này là hai Định lý chính của Nevanlinna.

Năm 1933, H.Cartan đã mở rộng lý thuyết Nevanlinna cho trường hợp đường cong chỉnh hình và đưa ra nhiều ứng dụng quan trọng. Vì vậy lý thuyết Nevanlinna đối với các đường cong chỉnh hình được mang tên hai nhà toán học xuất sắc của thế kỷ XX đó là "lý thuyết Nevanlinna-Cartan". Thông qua hướng nghiên cứu này nhiều kết quả đẹp đẽ trong giải tích hàm, trong đại số cũng như trong lý thuyết số được ra đời, gắn liền với nhiều tên tuổi của các nhà toán học trên thế giới như Ph. Griffiths, H.Weyl, P.Vojta, G.Faltings,...

Trên trường cơ sở không Acsimet (trường các số p-adic), lần đầu tiên Ha Huy Khoai và My Vinh Quang đã xây dựng tương tự p-adic của lý thuyết Nevanlinna thông qua 2 Định lý chính. Nhiều kết quả hay và những phát triển tiếp theo của lý thuyết Nevanlinna p-adic có thể tìm thấy trong những công trình [2], [3], [4], [5],...

Cho đến nay, lý thuyết Nevanlinna-Cartan dường như đã được hoàn thiện trong trường hợp phức. Tuy nhiên sự thể hiện của lý thuyết này trên trường cơ sở không Acsimet mới chỉ bắt đầu và còn lâu mới được hoàn thiện. Năm 1983, Ha Huy Khoai và My Vinh Quang đã chứng minh được các Định lý chính của lý thuyết Nevanlinna p-adic trong trường hợp một chiều. Năm 1993, W.Cherry đã xây dựng một bản sao p-adic hầu hết các kết quả của lý thuyết Nevanlinna đối với ánh xạ chỉnh hình xác định trên đĩa thủng của mặt phẳng p-adic $\mathbb{C}_p$. Để góp phần làm phong phú thêm lý thuyết Nevanlinna-Cartan với chiều cao trong trường hợp p-adic, vào năm 1995 Ha Huy Khoai và Mai Van Tu [5] đã phát biểu và chứng minh Định lý Nevanlinna-Cartan p-adic.

Theo hướng nghiên cứu này, tôi nghiên cứu đề tài :

Định lý Nevanlinna-Cartan p-adic và áp dụng.

Trong luận văn này tôi sẽ phát biểu và chứng minh lại Định lý Nevanlinna-Cartan p-adic [5]. Sau đó chỉ ra một số ứng dụng quan trọng của Định lý Nevanlinna-Cartan p-adic vào vấn đề nghiên cứu sự suy biến của đường cong chỉnh hình p-adic. Mặt khác, Định lý Mason và các vấn đề liên quan (xem [1-2-3]) là lĩnh vực nghiên cứu sôi động và thời sự. Vì vậy chúng tôi cũng trình bày lại tương tự của Định lý Mason cho các hàm nguyên p-adic. Đây là một trong những vấn đề mang tính thời sự và cấp thiết của giải tích p-adic, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành 2 chương:

Chương 1. Trình bày lại một số kiến thức về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình p-adic.

Chương 2. Trình bày lại Định lý Nevanlinna-Cartan p-adic, ứng dụng định lý vào vấn đề nghiên cứu sự suy biến của đường cong chỉnh hình p-adic và tương tự của Định lý Mason cho các hàm nguyên p-adic.

Chương 1

Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình *p*-adic

Hiện nay trong chương trình cao học chuyên ngành toán giải tích tại Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, giáo trình giải tích p-adic [1] đã được đưa vào giảng dạy. Ngoài ra, cũng có một số tài liệu tham khảo bằng tiếng Anh [2], [3-4] liên quan đến các kiến thức cơ bản này. Từ đó các học viên cao học, nghiên cứu sinh và những người quan tâm nghiên cứu, có thể tham khảo bổ sung và mở rộng thêm kiến thức về lý thuyết Nevanlinna p-adic. Thông qua các tài liệu này, trên cơ sở các kiến thức đã biết, trong Chương 1 tôi xin trình bày một số kiến thức về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình p-adic để dùng cho Chương 2.

1.1 Một số kiến thức cơ bản

1.1.1 Trường các số *p*-adic

Với p là một số nguyên tố cố định, Ostrowski đã khẳng định:
Chỉ có hai cách trang bị chuẩn không tầm thường cho trường hữu tỉ $\mathbb{Q}$.
Mở rộng theo chuẩn thông thường ta có trường số thực $\mathbb{R}$, mở rộng theo chuẩn p-adic ta có trường số $\mathbb{Q}_p$.
Kí hiệu $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{Q}}_p$ là bổ sung của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Ta gọi $\mathbb{C}_p$ là

trường số phức p-adic.
Chuẩn trên $\mathbb{C}_p$ được mở rộng tự nhiên của chuẩn p-adic trên $\mathbb{Q}_p$.
Kí hiệu:

$$D_r = \{z \in \mathbb{C}_p : |z| \leq r\}, D_{<r>} = \{z \in \mathbb{C}_p : |z| = r\}.$$

Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trên D_r được biểu diễn bởi $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$.
Do $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} |a_n| |z^n| = 0$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $|a_n| |z^n|$ đạt giá trị lớn nhất.
Khi đó ta đặt:

$$|f|_r = \max_{n \geq 0} \{|a_n| |z^n|\}.$$

Trong suốt luận văn ta quy ước log là log_p.

1.1.2 Hàm sinh bởi chuỗi lũy thừa p-adic

Hàm sinh bởi chuỗi lũy thừa p-adic là hàm có dạng

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbb{C}_p). \tag{1.1}$$

Ta có thể gán cho $f(z)$ giá trị của tổng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ với mỗi $z \in \mathbb{C}_p$ mà $|a_n z^n| \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$ (vì khi đó chuỗi hội tụ). Bán kính hội tụ ρ của chuỗi (1.1) được tính bởi công thức

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Giả sử chuỗi lũy thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ có bán kính hội tụ là ρ:
$0 < \rho \leq +\infty$. Với mỗi $r \in \mathbb{R}^+ : 0 < r < \rho$. Ta định nghĩa số hạng lớn nhất bởi

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

và chỉ số trung tâm

$$\nu(r, f) = \max_{n \geq 0} \{n : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}.$$