ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LỤC TRƯỜNG GIANG

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM XÂY DỰNG TỪ ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS Trần Nguyên An. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người thầy của mình.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo trong Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, tạo điều kiện, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2015

Học viên: **Lục Trường Giang**

MỞ ĐẦU

Định lý Giá trị trung bình Lagrange là một kết quả quan trọng trong Giải tích, bắt nguồn từ Định lý Rolle được chứng minh bởi nhà toán học Pháp Michel Rolle (1652-1719) cho đa thức năm 1691. Định lý Rolle xuất hiện lần đầu tiên trong cuốn sách "Methode pour resoudre le égalitez" mà không có chứng minh. Định lý Rolle được quan tâm khi Joseph Lagrange (1763-1813) trình bày định lý giá trị trung bình mà ta gọi là Định lý Giá trị trung bình Lagrange trong cuốn sách "Theorie des functions analytiques" năm 1797 của ông. Định lý Rolle còn được quan tâm nhiều hơn khi Augustine Louis Cauchy (1789-1857) sử dụng chứng minh định lý giá trị trung bình mà ta gọi là Định lý Giá trị trung bình Cauchy trong cuốn sách "Equationnes differentielles ordinaires". Hầu hết các kết quả trong cuốn sách của Cauchy được suy ra trực tiếp hoặc gián tiếp từ Định lý Rolle. Gần đây nhiều phương trình hàm được nghiên cứu nảy sinh từ các định lý giá trị trung bình.

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số lớp phương trình hàm nảy sinh từ một số định lý giá trị trung bình (Định lý giá trị trung bình Lagrange, Cauchy, Pompeui).

Luận văn bao gồm 2 chương. Chương 1 trình bày Định lí giá trị trung bình Lagrange và một số dạng phương trình hàm nảy sinh. Định lí giá trị trung bình Cauchy - một mở rộng trực tiếp của Định lí giá trị trung bình Lagrange và áp dụng cũng được trình bày trong chương này. Chương 2 trình bày Định lí giá trị trung bình Pompeui và ứng dụng vào phương trình hàm. Một số lớp phương trình hàm đặc biệt như phương trình hàm kiểu Stamate, phương trình hàm kiểu Kuczma và một số mở rộng cũng được trình bày ở phần cuối Chương 2.

Chương 1

Định lý Lagrange và phương trình hàm

1.1. Định lý giá trị trung bình Lagrange

Một trong các định lý quan trọng nhất trong phép tính vi phân là định lý giá trị trung bình Lagrange. Định lý này được khám phá đầu tiên bởi Joseph Louis Lagrange (1736-1813) bằng việc ứng dụng định lý Rolle. Để chứng minh định lý Rolle dựa vào hai kết quả đơn giản sau đây.

Mệnh đề 1.1.1. *Nếu một hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại một điểm c thuộc khoảng mở (a, b) thì $f'(c) = 0$.*

Mệnh đề 1.1.2. *Một hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt giá trị trên một khoảng đóng và bị chặn bất kỳ $[a, b]$.*

Định lý 1.1.1 (Định lí Rolle)**.** *Nếu f liên tục trên $[x_1, x_2]$, khả vi trên (x_1, x_2) và $f(x_1) = f(x_2)$, thì tồn tại một điểm $\eta \in (x_1, x_2)$ sao cho $f'(\eta) = 0$.*

Định lý 1.1.2 (Định lý giá trị trung bình Lagrange)**.** *Với mỗi hàm giá trị thực f khả vi trên khoảng I và với mọi cặp $x_1 \neq x_2$ trong I, tồn tại một điểm η phụ thuộc x_1 và x_2 sao cho*

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\eta(x_1, x_2)) \tag{1.1}$$

Trong mục này, chúng ta thiết lập một số kết quả về phép tính vi phân và tích phân sử dụng định lý giá trị trung bình Lagrange.

Hệ quả 1.1.1. *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b) thì f là hằng trên $[a, b]$.*

Hệ quả 1.1.2. *Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f và g sai khác một hằng số trên $[a, b]$.*

Hệ quả 1.1.3. *Nếu $f'(x) > 0$ (<0), với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm f tăng (giảm) thực sự trên $[a, b]$.*

Hệ quả 1.1.4. *Nếu $f''(x) > 0$, với mọi $x \in (a, b)$ thì f là lõm trên khoảng $[a, b]$.*

1.2. Áp dụng vào phương trình hàm

Trong mục này, chúng ta trình bày một số lớp phương trình hàm nảy sinh từ định lý giá trị trung bình Lagrange. Trước hết ta cần một số khái niệm sau.

Định nghĩa 1.2.1. Với các số thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ tỉ sai phân của hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa là

$$f[x_1] = f(x_1)$$

$$f\left[x_1, x_2, ..., x_n\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, ..., x_{n-1}\right] - f\left[x_2, ..., x_n\right]}{x_1 - x_n}, n \geqslant 2.$$

Dễ thấy rằng

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}.$$

Như vậy công thức trong định lí giá trị trung bình có thể được biểu diễn như sau

$$f[x_1, x_2] = f'(\eta(x_1, x_2)). \tag{1.2}$$

Trong đó η phụ thuộc x_1, x_2 . Từ đó, phương trình (1.2) xuất hiện phương trình hàm với hàm chưa biết là f và giá trị cho trước là η. Định lý tiếp theo được Aczél (1963) và Haruki (1979) đưa ra độc lập. Việc chứng minh định lý do Aczél (1985). Định lý này có liên quan tới phương trình (1.2).

Định lý 1.2.1. *Các hàm $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f[x, y] = h(x + y), x \neq y, \tag{1.3}$$

khi và chỉ khi $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $h(x) = ax + b$, trong đó a, b, c là các số thực tùy ý.

Chứng minh. Từ định nghĩa tỉ sai phân của f, có thể viết lại như sau

$$f(x) - f(y) = (x - y)h(x + y), x \neq y \tag{1.4}$$

Nếu f thỏa mãn phương trình (1.4), thì $f + b$ cũng thỏa mãn, với b là hằng số tùy ý. Vì vậy không mất tính tổng quát ta giả sử $f(0) = 0$. Đặt $y = 0$ trong phương trình (1.4) ta có

$$f(x) = xh(x). \tag{1.5}$$

Từ (1.4) ta có

$$xh(x) - yh(y) = (x - y)h(x + y). \tag{1.6}$$

Ngược lại nếu h thỏa mãn phương trình (1.6) thì $h + c$ cũng thỏa mãn,với c là hằng số tùy ý. Giả sử $h(0) = 0$, đặt $x = -y$ trong (1.6), ta được

$$-yh(-y) = yh(y) \tag{1.7}$$

Do đó h là hàm lẻ, cho $y = -y$ trong (1.6), ta có

$$xh(x) - yh(y) = (x + y)h(x - y). \tag{1.8}$$

So sánh (1.8) và (1.6), ta có

$$(x - y)h(x + y) = (x + y)h(x - y) \tag{1.9}$$

và thay $u = x + y, v = x - y$ vào (1.9), ta được $vh(u) = uh(v), \forall u, v \in \mathbb{R}$. Do đó ta có $h(u) = au$. Nếu không có giả sử $h(0) = 0$ thì ta có $h(u) = au + b$. Từ (1.5) có $f(x) = x(ax + b)$, nếu không có $f(0) = 0$ thì $f(x) = ax^2 + bx + c$. Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.2.1. *Hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right), x \neq y$$

khi và chỉ khi $f(x) = ax^2 + bx + c$*, với* a, b, c *là hằng số thực tùy ý.*

Định lý 1.2.2. *Nếu đa thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, với* $a \neq 0$*, là một nghiệm của phương trình hàm*

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), (0 < \theta < 1) \tag{1.10}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *thì* $\theta = \dfrac{1}{2}$*. Đảo lại, nếu một hàm* f *thỏa mãn phương trình hàm ở trên với* $\theta = \dfrac{1}{2}$ *thì nghiệm duy nhất là một đa thức có bậc nhiều nhất bằng hai.*

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1.11}$$

thỏa mãn (1.10). Thay (1.11) vào (1.10) ta có

$$a(x + h)^2 + b(x + h) + c - ax^2 - bx - c = h(2a(x + \theta h) + b)$$

hay $ah^2(1 - 2\theta) = 0.$. Vì $a, h \neq 0$ nên ta có $\theta = \dfrac{1}{2}$.
Ngược lại, cho $\theta = \dfrac{1}{2}$ và $h = y - x$ từ (1.10), ta có

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\frac{x+y}{2}), x \neq y.$$

Từ Hệ quả 1.2.1, f ta có định lý được chứng minh. □

Kết quả sau là của Kannappan, Sahoo và Jacobson (1995)

Định lý 1.2.3. *Với các tham số thực* s, t *các hàm* $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(sx + ty) \tag{1.12}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ *khi và chỉ khi*

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \textit{nếu } s = 0 = t \\ ax+b & \textit{nếu } s = 0, t \neq 0 \\ ax+b & \textit{nếu } s \neq 0, t = 0 \\ \alpha t x^2 + ax + b & \textit{nếu } s = t \neq 0 \\ \frac{A(tx)}{t} + b & \textit{nếu } s = -t \neq 0 \\ \beta x + b & \textit{nếu } s^2 \neq t^2 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$g(y) = \begin{cases} ay+b & \textit{nếu } \ s = 0 = t \\ ay+b & \textit{nếu } \ s = 0, t \neq 0 \\ ay+b & \textit{nếu } \ s \neq 0, t = 0 \\ \alpha t y^2 + ay + b & \textit{nếu } \ s = t \neq 0 \\ \frac{A(ty)}{t} + b & \textit{nếu } \ s = -t \neq 0 \\ \beta y + b & \textit{nếu } \ s^2 \neq t^2 \end{cases} \tag{1.14}$$

$$h(y) = \begin{cases} \textit{tùy ý, } h(0) = a & \textit{nếu } \ s = 0 = t \\ a & \textit{nếu } \ s = 0, t \neq 0 \\ a & \textit{nếu } \ s \neq 0, t = 0 \\ \alpha y + a & \textit{nếu } \ s = t \neq 0 \\ \frac{A(y)}{y} + \dfrac{(c-b)t}{y} & \textit{nếu } \ s = -t \neq 0 \\ \beta & \textit{nếu } \ s^2 \neq t^2 \end{cases} \tag{1.15}$$

trong đó $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là một hàm cộng tính và* a, b, c, α, β *là các hằng số thực tùy ý.*

Chứng minh. Ta xét các trường hợp xảy ra của s và t.

Trường hợp 1. Giả sử $s = t = 0$, (1.12) có dạng

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(0)$$

tức là $f(x) - ax = g(y) - ay$ trong đó $a = h(0)$, ta được

$$f(x) = ax + b \text{ và } g(y) = ay + b \tag{1.16}$$

b là hằng số tùy ý. Thay (1.16) vào (1.12), ta thấy rằng h là hàm hằng với $a = h(0)$.

Trường hợp 2. Giả sử $s = 0$, $t \neq 0$. Thì từ (1.12) ta có

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(ty). \tag{1.17}$$

Cho $y = 0$, ta có

$$f(x) = ax + b,\ \ x \neq 0 \tag{1.18}$$

với $a = h(0)$ và $b = g(0)$. Thay (1.18) vào (1.17), ta được

$$ax + b - g(y) = (x - y)h(ty) \tag{1.19}$$

với mọi $x \neq y, x \neq 0$. Đồng nhất hệ số của (1.19) đối với biến x, ta có

$$h(ty) = a \text{ và } g(y) = h(ty)y + b = ay + b, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Cho $x = 0$ trong (1.17) và từ (1.20), ta có $f(0) = b$. Do đó (1.18) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy từ (1.18) và (1.20) nên ta có (1.12).

Trường hợp 3. Giả sử $s \neq 0 \neq t$. Cho $x = 0$ trong (1.12) ta có

$$g(y) = yh(ty) + b \tag{1.21}$$

với mọi số thực $y \neq 0$ (b=f(0)). Tương tự cho $y = 0$ trong (1.12) ta có

$$f(x) = xh(sx) + c \tag{1.22}$$

với mọi $x \neq 0$ (c=g(0)). Thay (1.21) và (1.22) vào (1.12) ta được

$$xh(sx) - yh(ty) + c - b = (x - y)h(sx + ty) \tag{1.23}$$

với mọi số thực $x, y \neq 0$ và $x \neq y$.Thay $x = \dfrac{x}{s}$ và $y = \dfrac{y}{t}$ trong (1.23), ta có

$$\frac{x}{s}h(x) - \frac{y}{t}h(y) + c - b = (\frac{x}{s} - \frac{y}{t})h(x + y) \tag{1.24}$$

với mọi số thực $x, y \neq 0$ và $tx \neq ty$.

Trường hợp 3.1. Giả sử $s = t$ khi đó (1.24) trở thành

$$xh(x) - yh(y) = (b - c)t + (x - y)h(x + y). \tag{1.25}$$

Thay x bởi y và ngược lại rồi cộng vào (1.25) ta được $b = c$. Khi đó ta có

$$xh(x) - yh(y) = (x - y)h(x + y) \tag{1.26}$$