ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG NGỌC THÁI

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG NGỌC THÁI

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH VŨ NGỌC PHÁT

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 7 năm 2015

Người viết Luận văn

Hoàng Ngọc Thái

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS.TSKH Vũ Ngọc Phát. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn chân thành tới Ban Giám Hiệu trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo Khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy ở Viện Toán học - Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành được luận văn này.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái nguyên, tháng 7 năm 2015

Người viết Luận văn

Hoàng Ngọc Thái

Mục lục

Mở đầu

Bài toán ổn định các hệ phương trình vi phân là một trong những bài toán có nhiều ứng dụng quan trọng trong giải các bài toán xuất phát từ thực tế, đòi hỏi phải sử dụng nhiều lý thuyết và công cụ toán học hiện đại. Lý thuyết ổn định các hệ động lực bắt đầu được khởi xướng từ cuối thế kỉ mười chín bởi những ý tưởng và kết quả quan trọng của nhà toán học người Nga A.M. Lyapunov. Một cách hình tượng, một hệ thống được gọi là ổn định tại trạng thái cân bằng nào đó nếu các nhiễu nhỏ của các dữ kiện hoặc các cấu trúc ban đầu của hệ thống không làm cho hệ thống thay đổi nhiều so với trạng thái cân bằng của nó. Do đó, lý thuyết ổn định được nghiên cứu xuất phát từ thực tiễn và nhu cầu phát triển của một số ngành khoa học. Từ những năm 60 của thế kỷ 20, người ta bắt đầu nghiên cứu tính ổn định các hệ điều khiển như bài toán điều khiển được, bài toán ổn định hoá, điều khiển tối ưu,...Từ đó đến nay tính ổn định của các hệ điều khiển toán được nghiên cứu sôi nổi, thu được nhiều thành tựu rực rỡ, sâu sắc và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như: vật lý, kinh tế, khoa học kĩ thuật, sinh thái học, môi trường...

Có nhiều phương pháp nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân. Có thể kể ra đây một số phương pháp chính như phương pháp thứ nhất Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp mũ đặc trưng), phương pháp thứ hai Lyapunov (hay còn gọi là phương pháp hàm Lyapunov), phương pháp xấp xỉ, phương pháp so sánh...

Nội dung của bản luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày những kiến thức cơ sở về hệ phương trình vi phân, khái niệm về tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân, đồng thời giới thiệu phương pháp hàm Lyapunov để xem xét tính ổn định của hệ phương trình vi phân. Chương 2 giới thiệu bài toán ổn định hệ phương trình vi phân.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của GS.TSKH Vũ Ngọc Phát, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học Công nghệ Việt Nam. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Khoa Sau Đại học, Khoa Toán trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong có được những ý kiến đóng góp của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Kí hiệu toán học

$\mathbb{Z}$	Tập số nguyên.
$\mathbb{Z}^+$	Tập số nguyên không âm.
$\mathbb{R}$	Tập số thực.
$\mathbb{R}^+$	Tập số thực không âm.
$\mathbb{R}^n$	Không gian vectơ Euclide n chiều.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	Không gian các ma trận thực cấp $n \times n$.
I	Ma trận đơn vị.
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A.
$P > 0$	Ma trận xác định dương.
$\lambda(P)$	Các giá trị riêng của ma trận P.
$C_{[a,b]}$	Tập các hàm số liên tục trong $[a, b]$.

Chương 1

Cơ sở toán học

Trong chương này tôi trình bày các định nghĩa, định lý và các khái niệm cơ bản về hệ phương trình vi phân, phương pháp hàm Lyapunov. Nội dung chương này trình bày theo các tài liệu [1], [2], [5].

1.1 Đại số tuyến tính

• Vectơ $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ gọi là vectơ riêng của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nếu có một số λ (có thể là số thực hoặc số phức) sao cho $Av = \lambda v$. Số λ gọi là giá trị riêng của A ứng với vectơ riêng v, tập các giá trị riêng của A sẽ kí hiệu là $\lambda(A)$. Các giá trị riêng của A xác định bởi nghiệm của phương trình đa thức đặc trưng của $A : \det(\lambda I - A) = 0$ hay

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Định lý 1.1.1. *(Cayley - Hamilton). Mọi ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó:*

$$p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + ... + a_{n-1}A + a_nI = 0.$$

• Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$. Chuẩn của ma trận

A sẽ xác định bởi

$$||A|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

• Cho đa thức tùy ý bậc n

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k,$$

nếu $n = \infty$ thì chuỗi giả thiết là hội tụ. Hàm của ma trận A được xác định bởi

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k.$$

Định lý 1.1.2. *(Công thức Sylvester). Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ khác nhau. Cho $f(\lambda)$ là hàm đa thức bậc n nào đó dạng* (1.1). *Khi đó*

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} Z_k f(\lambda_k),$$

trong đó Z_k xác định bởi

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)...(A-\lambda_{k-1} I)(A-\lambda_{k+1})...(A-\lambda_n I)}{(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)...(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})...(\lambda_k-\lambda_n)} \\ &= \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j}. \end{aligned}$$

• Ma trận A gọi là xác định dương nếu

i) $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\langle Ax, x\rangle > 0, \quad x \neq 0$. trong đó $\langle x, y\rangle$ ký hiệu tích vô hướng của hai vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ xác định bởi

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

• Nếu $A = A^T$, thì A gọi là ma trận đối xứng. Ta luôn có AA^T là ma trận đối xứng và $(AB)^T = B^T A^T$. Nếu A là không suy biến, tức là $\det A \neq 0$,