ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐỊNH LÝ HARTOGS VÀ ĐỊNH LÝ ZORN TRONG VÔ HẠN CHIỀU

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn: GS.TSKH. Nguyễn Văn Khuê

Thái Nguyên - 2010

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Khuê. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và thành kính nhất đến Thầy, Thầy không chỉ hướng dẫn tôi nghiên cứu khoa học mà Thầy còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Cũng nhân dịp này tôi xin chân thành cảm ơn gia đình và bạn bè tôi đã hết sức quan tâm và giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo Đại học sư phạm Hà Nội, viện Toán học Việt Nam và các thầy cô giáo trong khoa sau Đại học, Đại học Sư Phạm Thái Nguyên , Đại Học Thái Nguyên đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2010

Học viên

Đặng Việt Đông

LỜI MỞ ĐẦU

Định lý Hartogs về tính chỉnh hình của hàm chỉnh hình tách biến là một trong những Định lý nền tảng của giải tích phức hữu hạn chiều. Vì vậy trong trường hợp vô hạn chiều nó luôn là mối quan tâm của nhiều tác giả. Mục đích chính của luận văn là trình bày Định lý này trong $\mathbb{C}^n$ và mở rộng tới trường hợp là tích các không gian Banach. Chìa khoá cho sự mở rộng này là Định lý Zorn về tính chỉnh hình của ánh xạ G-chỉnh hình khi ánh xạ này là liên tục tại ít nhất một điểm

Bố cục của luận văn bao gồm 3 chương:

- Chương 1 của luận văn trình bày một số kiến thức cơ sở về ánh xạ đa tuyến tính. Sau đó là một số nội dung về đa thức thuần nhất, đa thức một biến bậc tối đa m trong không gian Banach, chuỗi lũy thừa trong không gian Banach với số hạng là các đa thức thuần nhất. Các Định lý và kết quả cơ bản liên quan của luận văn.

- Chương 2 của luận văn trình bày khái niệm về ánh xạ chỉnh hình, khái niệm hàm điều hòa dưới trong không gian Banach và thiết lập tính chất cơ sở của chúng. Trong đó không gian Banach được xét là không gian phức.

- Chương 3 trình bày phần nội dung chính của luận văn: Định lý Hartogs trong C^n, Định ý Zorn, và mở rộng của Định lý Hartogs trên tích các không gian Banach

Chương 1

ĐA THỨC VÀ CHUỖI LŨY THỪA

1.1. Ánh xạ đa tuyến tính

Trong mục này, chúng ta sẽ trình bày khái niệm ánh xạ đa tuyến tính cùng một số kết quả ban đầu của nó. Trước hết ta đưa ra một số kí hiệu sau:

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức $\mathbb{C}$ và $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ lần lượt là tập các số nguyên dương và số nguyên không âm. Các chữ $E,\ F,\ldots$ dùng để chỉ các không gian Banach. Nếu E là không gian Banach còn $m \geq 1$, không gian tích $E^m = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{m}$ là không gian Banach với chuẩn max cho bởi

$$\|x\| = \max_{1\leq j\leq m} \|x_j\|,\ x_j \in E,\ 1 \leq j \leq m.$$

1.1.1 Định nghĩa. Giả sử $E,\ F$ là các không gian Banach còn $m \in \mathbb{N}$. Ánh xạ $A\colon E^m \to F$ gọi là m - tuyến tính theo từng biến. Nghĩa là với mọi $a = (a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m) \in E^m$ và mọi $1 \leq j \leq m$, các ánh xạ

$$E_j \ni x_j \longmapsto A(a_1,\ldots,\ a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_m)$$

là tuyến tính.

Ký hiệu $\mathscr{L}_a(^mE,\ F)$ và $\mathscr{L}(^mE,\ F)$ là không gian vectơ các ánh xạ m - tuyến tính và m - tuyến tính liên tục từ E^m vào F tương ứng. Với $A \in \mathscr{L}_a(^mE,\ F)$, xác định

$$\|A\| = sup\{\|A(x_1,\ldots,x_m)\| : x_j \in E, \|x_j\| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$$

và gọi là chuẩn(suy rộng) của A.

Khi $m=1$, ta viết $\mathscr{L}_a({}^1E,\,F)=\mathscr{L}_a(E,\,F)$ và $\mathscr{L}({}^1E,\,F)=\mathscr{L}(E,\,F)$. Khi $F=\mathbb{K}$ viết $\mathscr{L}_a({}^mE,\,\mathbb{K})=\mathscr{L}_a({}^mE)$ và $\mathscr{L}({}^mE,\,\mathbb{K})=\mathscr{L}({}^mE)$. Cuối cùng khi $m=1$, ta sẽ viết như thông thường $\mathscr{L}_a(E)=E^\sharp$, $\mathscr{L}(E)=E^*$.

1.1.2 Mệnh đề. *Đối với $A\in\mathscr{L}_a({}^mE,\,F)$ các điều kiện sau là tương đương:*

a) A là liên tục.

b) A là liên tục tại $0\in E^m$.

c) $\|A\|<+\infty$.

Chứng minh. $a)\Longrightarrow b)$ là hiển nhiên.

$b)\Longrightarrow c)$. Giả sử có giả thiết $b)$ nhưng $c)$ không xảy ra. Vậy tồn tại dãy $(x_1^k,\ldots,x_m^k)\subset E^m$ sao cho

$$\max_j\|x_j^k\|\le 1$$

nhưng

$$\|A(x_1^k,\ldots,x_m^k)\|\ge k^m$$

đối với mọi $k\ge 1$. Suy ra

$$\max_j\|\frac{x_j^k}{k}\|\le\frac{1}{k}$$

và

$$\|A(x_1^k/k,\ldots,x_m^k/k\|\ge 1$$

với mọi k mà nó trái với $b)$.

$c)\Longrightarrow a)$. Giả sử $a=(a_1,\ldots,a_m)\in E^m$ và $x=(x_1,\ldots,x_m)\in E^m$ với $\max_j\|a_j\|\le c$ và $\max_j\|x_j\|\le c$. Khi đó

$$
\begin{aligned}
&\|A(x_1,\dots,x_m)-A(a_1,\dots,a_m)\| \\
&=\|\sum_{j=1}^{m}\left[A(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,\dots,x_m)-A(a_1,\dots,a_j,x_{j+1},\dots,x_m)\right]\| \\
&\le \sum_{j=1}^{m}\|A(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,\dots,x_m)-A(a_1,\dots,a_j,x_{j+1},\dots,x_m)\| \\
&\le \sum_{j=1}^{m}\|A\|c^{m-1}\|x_j-a_j\| \to 0 \text{ khi } x_j \to a_j, 1\le j\le m.
\end{aligned}
$$

Vậy $c) \Longrightarrow a)$. □

1.1.3 Mệnh đề. *$\mathscr{L}(^mE,\ F)$ là không gian Banach với chuẩn $A \longmapsto \|A\|$*

Chứng minh. Dễ thấy rằng ánh xạ $A \longmapsto \|A\|$ là một chuẩn trên $\mathscr{L}(^mE,\ F)$. Giả sử $\{A_j\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathscr{L}(^mE,\ F)$. Khi đó với mọi $(x_1,\dots,x_m)\in E^m$ ta có

$$\|A_j(x_1,\dots,x_m)-A_k(x_1,\dots,x_m)\| \le \|A_j-A_k\|\|x_1\|\cdots\|x_m\| \qquad (1.1.1)$$

Suy ra dãy$\{A_j(x_1,\dots,x_m)\}\subset F$ là dãy Cauchy. Vì F là Banach nên tồn tại

$$A(x_1,\dots,x_m)=\lim_j A_j(x_1,\dots,x_m). \qquad (1.1.2)$$

Dễ thấy ánh xạ $A\colon E^m \to F$ là m - tuyến tính. Ngoài ra do $\{A_j\}$ là dãy Cauchy trong $\mathscr{L}(^mE,\ F)$ nên tồn tại c sao cho $\|A_j\|\le c$ với mọi $j\ge 1$. Khi đó từ (1.1.2) suy ra $\|A\|\le c$. Cuối cùng từ (1.1.1) ta có $\|A_j-A\|\to 0$ khi $j\to+\infty$. □

1.1.4 Mệnh đề. *Tồn tại đẳng cấu chính tắc giữa không gian vec tơ $\mathscr{L}_a(^{m+n}E,\ F)$ và $\mathscr{L}_a(^mE,\ \mathscr{L}_a(^nE,\ F))$. Đẳng cấu này sinh ra đẳng cự giữa $\mathscr{L}(^{m+n}E,\ F)$ và $\mathscr{L}(^mE,\ \mathscr{L}(^nE,\ F))$.*

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra ánh xạ

$$\mathscr{L}_a(^{m+n}E,\ F)\ni A\longmapsto \widetilde{A}\in\mathscr{L}_a(^mE,\ \mathscr{L}_a(^nE,\ F))$$

xác định bởi

$$\widetilde{A}(x_1,\dots,x_m)(y_1,\dots,y_n) = A(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$$

thỏa mãn các yêu cầu đặt ra. $\square$

Đối với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ký hiệu S_m là nhóm đối xứng tất cả các hoán vị của m phần tử. Nếu $\sigma \in S_m$ thì $(-1)^\sigma$ ký hiệu dấu của hoán vị σ.

1.1.5 Định nghĩa. Đối với mỗi $m \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\mathscr{L}_a^s({}^mE,\ F)$ là không gian con vec tơ của các $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\ F)$ mà nó là đối xứng, nghĩa là

$$A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}) = A(x_1,\dots,x_m)$$

với mọi $(x_1,\dots,x_m) \in E$ và mọi $\sigma \in S_m$.

Tương tự ta kí hiệu $\mathscr{L}_a^a({}^mE,\ F)$ là không gian con vec tơ tất cả các $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\ F)$ mà nó là thay phiên hay phản đối xứng, nghĩa là

$$A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}) = (-1)^\sigma A(x_1,\dots,x_m)$$

với mọi $(x_1,\dots,x_m) \in E^m$ và mọi $\sigma \in S_m$.

Các không gian $\mathscr{L}^s({}^mE,\ F)$ và $\mathscr{L}^a({}^mE,\ F)$ được xác định tương tự. Đó là

$$\mathscr{L}^s({}^mE,\ F) = \mathscr{L}_a^s({}^mE,\ F) \cap \mathscr{L}({}^mE,\ F)$$

và

$$\mathscr{L}^a({}^mE,\ F) = \mathscr{L}_a^a({}^mE,\ F) \cap \mathscr{L}({}^mE,\ F).$$

Trường hợp $F = \mathbb{K}$ ta viết $\mathscr{L}_a^s({}^mE,\ \mathbb{K}) = \mathscr{L}_a^s({}^mE)$ và $\mathscr{L}_a^a({}^mE,\ \mathbb{K}) = \mathscr{L}_a^a({}^mE)$.

1.1.6 Mệnh đề. *Đối với mỗi $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\ F)$ giả sử A^s và A^a xác định bởi*

$$A^s(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})$$

và

$$A^a(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} (-1)^\sigma A(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})$$

Khi đó

a) Ánh xạ $A \longmapsto A^s$ *là một phép chiếu từ* $\mathscr{L}_a({}^mE,\, F)$ *lên* $\mathscr{L}_a^s({}^mE,\, F)$ *với* $\|A^s\| \leq \|A\|$ *xảy ra cho mọi* $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\, F)$*. Ánh xạ này cảm sinh một phép chiếu liên tục từ* $\mathscr{L}({}^mE,\, F)$ *lên* $\mathscr{L}^s({}^mE,\, F)$*.*

b) Ánh xạ $A \longmapsto A^a$ *là một phép chiếu từ* $\mathscr{L}_a({}^mE,\, F)$ *lên* $\mathscr{L}_a^a({}^mE,\, F)$ *với* $\|A^a\| \leq \|A\|$ *xảy ra cho mọi* $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\, F)$*. Ánh xạ này cảm sinh một phép chiếu liên tục từ* $\mathscr{L}({}^mE,\, F)$ *lên* $\mathscr{L}^a({}^mE,\, F)$*.*

Chứng minh Mệnh đề này dành cho độc giả.

Để rõ ràng, ta đặt (đối với $m = 0$)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_a({}^0E,\, F) \quad &= \mathscr{L}_a^s({}^0E,\, F) = \mathscr{L}_a^a({}^0E,\, F)\\ &= \mathscr{L}({}^0E,\, F) = \mathscr{L}^s({}^0E,\, F) = \mathscr{L}^a({}^0E,\, F) = F.\end{aligned}$$

Đối với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, ta đặt:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!.$$

1.1.7 Định nghĩa. Giả sử $A \in \mathscr{L}_a({}^mE,\, F)$. Khi đó với mỗi $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ và với mỗi $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ với $|\alpha| = m$ ta xác định

$$Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$$

nếu với $m \geq 1$ và

$$Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = A \quad \text{nếu} \quad m = 0$$

1.1.8 Định lý. *Giả sử* $A \in \mathscr{L}_a^s({}^mE,\, F)$*. Khi đó đối với mọi* $x_1, \ldots, x_n \in E$ *ta có công thức Leibniz*

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m. Khi $m = 0$ và $m = 1$ công thức hiển nhiên đúng. Giả sử công thức đúng cho $m \geq 1$. Dễ thấy công thức đúng cho $m + 1$. Thật vậy, nếu $A \in \mathscr{L}_a^s({}^mE,\, F)$. Viết

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^{m+1} = A(x_1 + \cdots + x_n)(x_1 + \cdots + x_n)^m$$

và áp dụng giả thiết quy nạp tới $A(x_1+\cdots+x_n)\in\mathscr{L}_a^s({}^mE,\ F)$ ta có

$$\begin{aligned}
A(x_1+\cdots+x_n)^{m+1} &= \sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}A(x_1+\cdots+x_n)x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\\
&= \sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\sum_{j=1}^{n}Ax_1^{\alpha_1}\cdots x_j^{\alpha_j+1}\cdots x_n^{\alpha_n}\\
&= \sum_{|\alpha|=m+1}\frac{(m+1)!}{\alpha!}Ax_1^{\alpha_1}\cdots\ x_n^{\alpha_n}
\end{aligned}$$

□

1.1.9 Hệ quả. *Giả sử $A\in\mathscr{L}_a^s({}^mE,\ F)$. Khi đó với mọi $x,\ y\in E$ ta có khai triển nhị thức Newton sau:*

$$A(x+y)^m=\sum_{j=0}^{m}C_m^jAx^{m-j}y^j.$$

1.1.10 Định lý. *Giả sử $A\in\mathscr{L}_a^s({}^mE,\ F)$ khi đó với mọi $x_0,\ldots,x_m\in E$ ta có công thức phân cực*

$$A(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_mA(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m$$

Chứng minh. Theo công thức Leibniz 1.1.8 ta có

$$A(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m=\sum\frac{m!}{\alpha_0!\cdots\alpha_m!}\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdots\varepsilon_m^{\alpha_m}Ax_0^{\alpha_0}\cdots x_m^{\alpha_m}$$

ở đây tổng lấy theo tất cả $\alpha_0,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{N}_0$ sao cho $\alpha_0+\cdots+\alpha_m=m$. Vậy suy ra

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_mA(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_mx_m)^m$$

$$=m!\sum_{\alpha_k}\frac{Ax_0^{\alpha_0}\cdots\ x_m^{\alpha_m}}{\alpha_0!\cdots\alpha_m!}\sum_{\varepsilon_j}\varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_m^{\alpha_m+1}$$

Tuy nhiên

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_m^{\alpha_m+1}=0$$