VIỆN KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

DƯƠNG THỊ KIM HUYỀN

TÍNH MỞ CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ VÀ CÁC ĐỊNH LÝ HÀM ẨN

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

MÃ SỐ : 60 46 36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH. NGUYỄN ĐÔNG YÊN

HÀ NỘI - NĂM 2011

Mục lục

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$\|x\|$	chuẩn của x
$\mathcal{V}(x)$	họ các lân cận của x
$B(x,r), D(x,r)$	hình cầu mở và hình cầu đóng tâm x, bán kính r
S_X	mặt cầu đơn vị trong X
$d(x,A)$	khoảng cách từ x đến A
$x \xrightarrow{S} \bar{x}$	$x \to \bar{x}$ và $x \in S$
$x \xrightarrow{f} \bar{x}$	$x \to \bar{x}$ và $f(x) \to f(\bar{x})$
$\widehat{N}_\varepsilon(S,x)$	tập các véctơ ε-pháp tuyến của S tại x
$\widehat{N}(S,x)$	nón pháp tuyến Fréchet của S tại x
$N(S,\bar{x})$	nón pháp tuyến cơ sở của S tại $\bar{x}$
$\widehat{\partial}f(\bar{x})$	dưới vi phân Fréchet của f tại $\bar{x}$
$\partial f(\bar{x})$	dưới vi phân cơ sở của f tại $\bar{x}$
δ_Ω	hàm chỉ của tập $\emptyset \neq \Omega \subset X$
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\mathrm{Dom}F$	miền hữu hiệu của F
$\mathrm{Gr}F$	đồ thị của F
$\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y})(\cdot)$	đối đạo hàm Fréchet của F tại $(\bar{x},\bar{y})$
$D^*F(\bar{x},\bar{y})(\cdot)$	đối đạo hàm Mordukhovich của F tại $(\bar{x},\bar{y})$

Lời mở đầu

Tiếp sau sự phát triển đạt đến mức độ hoàn thiện của Giải tích lồi [21], Giải tích không trơn [7], Giải tích đa trị [3, 4], một lý thuyết mới dưới tên gọi là *Giải tích biến phân* đã ra đời và ngày càng được chú ý. Các kết quả cơ bản của Giải tích biến phân trong các không gian hữu hạn chiều của đã được trình bày trong cuốn chuyên khảo của R. T. Rockafellar và R. J.-B. Wets [22]. Bộ sách hai tập [17] của B. S. Mordukhovich trình bày nhiều kết quả sâu sắc về Giải tích biến phân và phép tính vi phân suy rộng trong không gian vô hạn chiều, cùng với những ứng dụng phong phú trong Quy hoạch toán học, Lý thuyết các bài toán cân bằng, Điều khiển tối ưu các hệ động lực được mô tả bởi phương trình tiến hóa, Điều khiển tối ưu các hệ động lực được mô tả bởi phương trình đạo hàm riêng, Tối ưu véctơ, và Cân bằng kinh tế. Các kỹ thuật cơ bản của Giải tích biến phân và mối liên hệ của nó với các kỹ thuật của Giải tích hàm được trình bày trong cuốn chuyên khảo của J. M. Borwein và Q. J. Zhu [6].

Tính mở là một tính chất quan trọng khi nghiên cứu ánh xạ đa trị cũng như ánh xạ đơn trị. Tính chất này rất hữu ích trong nhiều lĩnh vực của lý thuyết tối ưu, ví dụ như trong việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán bị nhiễu, hay trong việc chứng minh các điều kiện tối ưu cho các bài toán quy hoạch toán học.

Luận văn này trình bày một số kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị và các định lý hàm ẩn dựa trên bài báo [10] của hai nhà toán học Rumani là M. Durea và R. Strugariu (đã được đăng trên Pacific Journal of Optimization, Vol. 6, No. 3, 2010, pp. 533-549). Những kết quả của hai tác giả này đã phát triển và làm sâu sắc thêm các định lý hàm ẩn trong bài báo của G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen [13].

Khả năng sử dụng cách tiếp cận của [10] để phát triển thêm một bước các kết quả của N. D. Yen và J.-C. Yao [23] (sử dụng đối đạo hàm Mordukhovich tại một điểm trên đồ thị của ánh xạ đa trị được xét) vẫn còn là một vấn đề mở.

Lưu ý rằng các kết quả tương tự như các kết quả của [10] đã được M. Durea trình bày trong [9].

Chương 1 trình bày các khái niệm thông dụng trong Giải tích đa trị và Giải tích biến phân, cùng với một số kết quả kinh điển: Nguyên lý biến phân Ekeland, Quy tắc tổng mờ.

Chương 2 chứng minh một số kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị, xét riêng các trường hợp ánh xạ không có tham số và ánh xạ có tham số. Ở đây, theo cách tiếp cận của M. Durea và R. Strugariu [10], chúng ta khai thác một điều kiện chính quy của họ đối đạo hàm Fréchet: Tồn tại các hằng số $c > 0$, $r > 0$, $s > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \mathrm{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$ và với mọi $y^* \in Y^*$, $x^* \in \hat{D}^*F(x, y)(y^*)$,

$$c\|y^*\| \leq \|x^*\|, \tag{1}$$

trong đó $\hat{D}^*F(x, y)(\cdot) : Y^* \rightrightarrows X^*$ ký hiệu đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ giữa hai không gian Asplund X

và Y tại điểm (x, y) thuộc tập *đồ thị*

$$\mathrm{Gr}F := \{(u, v) \in X \times Y \mid v \in F(u)\}, \tag{2}$$

và $B(\bar{x}, r)$ ký hiệu hình cầu mở có tâm $\bar{x}$ và bán kính r. Điều kiện chính quy vừa nêu tương tự với các điều kiện đã được các ;ác giả khác đưa ra trước đây [12, 13, 18]. Số c trong (1) có liên ıuan đến khái niệm *hằng số Banach* (chính là *độ mở*) của toán ử tuyến tính.

Chương 3 đề cập đến hàm ẩn đa trị. Chúng ta sẽ thấy rằng, ıới những giả thiết thích hợp, hàm ẩn đa trị thừa hưởng một tính chất của ánh xạ đa trị chứa tham số ban đầu. Cụ thể n, các tính chất được bàn tới ở đây là tính nửa liên tục dưới, h chính quy mêtric, tính giả Lipschitz (còn được gọi là tính t Aubin, hoặc tính giống-Lipschitz). Các tính chất này được ng minh dựa trên các kết quả trình bày trong Chương 2. ıg số các kết quả ở Chương 3, còn có một đánh giá dưới cho đạo hàm của hàm ẩn đa trị (Định lý 3.3).

ıận văn có một kết quả mới, đó là khẳng định ở Mục 2.2 ơng 2) nói rằng kết luận trong định lý ánh xạ mở của urea và R. Strugariu [10, Theorem 3.1] không còn đúng, ại bỏ giả thiết về tính đóng của ánh xạ đa trị được xét.

ın văn này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. ı Đông Yên.

giả chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Đông Yên và các cứu sinh của thầy đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá n luận văn.

ịả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và

và Y tại điểm (x, y) thuộc tập *đồ thị*

$$\mathrm{Gr}F := \{(u, v) \in X \times Y \mid v \in F(u)\}, \tag{2}$$

và $B(\bar{x}, r)$ ký hiệu hình cầu mở có tâm $\bar{x}$ và bán kính r. Điều kiện chính quy vừa nêu tương tự với các điều kiện đã được các tác giả khác đưa ra trước đây [12, 13, 18]. Số c trong (1) có liên quan đến khái niệm *hằng số Banach* (chính là *độ mở*) của toán tử tuyến tính.

Chương 3 đề cập đến hàm ẩn đa trị. Chúng ta sẽ thấy rằng, dưới những giả thiết thích hợp, hàm ẩn đa trị thừa hưởng một số tính chất của ánh xạ đa trị chứa tham số ban đầu. Cụ thể hơn, các tính chất được bàn tới ở đây là tính nửa liên tục dưới, tính chính quy mêtric, tính giả Lipschitz (còn được gọi là tính chất Aubin, hoặc tính giống-Lipschitz). Các tính chất này được chứng minh dựa trên các kết quả trình bày trong Chương 2. Trong số các kết quả ở Chương 3, còn có một đánh giá dưới cho đối đạo hàm của hàm ẩn đa trị (Định lý 3.3).

Luận văn có một kết quả mới, đó là khẳng định ở Mục 2.2 (Chương 2) nói rằng kết luận trong định lý ánh xạ mở của M. Durea và R. Strugariu [10, Theorem 3.1] không còn đúng, nếu loại bỏ giả thiết về tính đóng của ánh xạ đa trị được xét.

Luận văn này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên.

Tác giả chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Đông Yên và các nghiên cứu sinh của thầy đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và cán bộ công nhân viên của Viện Toán học đã quan tâm giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện.

Hà Nội, ngày 29 tháng 8 năm 2011

Tác giả luận văn

Dương Thị Kim Huyền

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản của Giải tích đa trị và Giải tích biến phân, cùng với một số kết quả kinh điển, như Nguyên lý biến phân Ekeland, Quy tắc tổng mờ.

1.1 Ánh xạ đa trị

Cho X và Y là các không gian tôpô. Xét ánh xạ đa trị

$$F : X \rightrightarrows Y$$

xác định trên X, nhận giá trị trong tập các tập hợp con của Y. *Đồ thị* (graph) của F được cho bởi (2), còn *miền hữu hiệu* (effective domain) của F được cho bởi

$$\mathrm{Dom} F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

Nếu $A \subset X$ thì $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$ là ảnh của tập A qua ánh xạ F. Tập $F(X)$ được ký hiệu bởi $\mathrm{Im} F$ và được gọi là *ảnh* (image)