ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

−−−−−−−−−−−

HOÀNG TUẤN ANH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60.46.36**

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2010

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy GS. TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam) đã trực tiếp hướng dẫn, chỉ bảo, động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin cảm ơn các thầy, các cô trong Khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn sinh viên trong lớp cao học toán K2, trường Đại học Khoa học đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên, và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân đã luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn này vẫn không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp và phản hồi từ phía các thầy, các cô, các bạn để luận văn này được hoàn thiện một cách tốt hơn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10-2010

Tác giả

Hoàng Tuấn Anh

Một số ký hiệu viết tắt

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều.
$\|\beta\|$	trị tuyệt đối của số thực β.
$x := y$	x được định nghĩa bằng y.
$\forall x$	với mọi x.
$\exists x$	tồn tại x.
$\\| x \\|$	chuẩn của véc tơ x.
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai véc tơ x, y.
$A \subset B$	tập A là tập con thực sự của tập B.
$A \subseteq B$	tập A là tập con của tập B.
$A \cup B$	A hợp với B.
$A \cap B$	A giao với B.
$A \equiv B$	A trùng với B.
$A \times B$	tích Đề các của hai tập A và B.
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A.
VI	bài toán bất đẳng thức biến phân.
NCP	bài toán bù phi tuyến.
t.ư.	tương ứng.

Lời nói đầu

Bất đẳng thức biến phân là một bài toán quan trọng trong toán học ứng dụng. Do đó bài toán này đã được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Trong hướng nghiên cứu này, phương pháp giải là một đề tài quan trọng. Mục đích của luận văn này là tập trung giới thiệu trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân, một số tính chất về tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân. Đặc biệt đi sâu vào việc giới thiệu các phương pháp giải cơ bản cho lớp bài toán này.

Luận văn bao gồm 3 chương. Chương 1: Các kiến thức cơ bản về giải tích lồi và toán tử đơn điệu, chương này nhắc lại và trình bày các khái niệm, định lý, tính chất dùng để nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân ở chương sau. Chương 2: Bài toán bất đẳng thức biến phân, chương này trình bày định nghĩa về bài toán bất đẳng thức biến phân và các ví dụ. Đồng thời cũng trình bày về sự tồn tại và tính chất tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Chương 3: Các hàm đánh giá cơ bản, trình bày một số khái niệm và ví dụ về hàm đánh giá dùng để giải bất đẳng thức biến phân, đồng thời cũng trình bày một số phương pháp lặp cơ bản để giải bài toán bất đẳng thức biến phân.

Thái Nguyên, tháng 10-2010

Tác giả

Hoàng Tuấn Anh

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

Trong chương này, chúng ta sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, những kiến thức sẽ được sử dụng ở phần sau. Do chương này chỉ có tính chất phụ trợ nên các kết quả có được sẽ không chứng minh, chi tiết có thể xem thêm ở các tài liệu [1], [2], [3], [4].

Định nghĩa 1.1. Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $0 \le \lambda \le 1$ gọi là *đoạn thẳng (đóng)* nối a và b, và được ký hiệu $[a, b]$.

Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *lồi* nếu nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó; nói cách khác, nếu $(1-\lambda)a + \lambda b \in C$ với mọi $a, b \in C$ và mọi $0 \le \lambda \le 1$.

Định lí 1.1. *Tập lồi là đóng với phép giao, phép cộng, phép nhân với một số và phép lấy tổ hợp tuyến tính. Tức là, nếu A và B là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ thì các tập sau cũng là tập lồi:*

1. $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$.
2. $\lambda A + \beta B = \{x = \alpha a + \beta b : a \in A, b \in B\}$.

Định nghĩa 1.2. Một tập hợp lồi mà nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một *tập lồi đa diện.* Cụ thể hơn, một tập lồi đa diện là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ nghiệm đúng hệ $Ax \ge b$, trong đó, A là một ma trận $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.3. Tập con M của $\mathbb{R}^n$ được gọi là một *nón* (đỉnh tại gốc) nếu:

$$x \in M, \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda x \in M.$$

Nón M được gọi là *nón lồi* nếu M là tập lồi.

Định nghĩa 1.4. Cho tập lồi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, hàm số $f : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *hàm lồi* trên A, nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall x, y \in A, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Hàm f được gọi là *lồi chặt* trên A nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall x, y \in A, 0 < \lambda < 1.$$

Hàm f được gọi là *lõm (lõm chặt)* trên A nếu $-f$ là lồi (lồi chặt) trên A.
Hàm f được gọi là *hàm tựa lồi* trên A, nếu với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ tập mức $\{x \in A : f(x) \leq \lambda\}$ là một tập lồi.
Hàm f được gọi là *hàm tựa lõm* trên A nếu $-f$ là hàm tựa lồi trên A.

Định lí 1.2. *Cho f là một hàm lồi trên tập A và f là một hàm lồi trên tập B. Lúc đó các hàm sau là lồi trên $A \cap B$:*

1. $\lambda f + \beta f$, *với mọi* $\lambda, \beta \geq 0$.
2. $Max(f, g)$.

Định nghĩa 1.5. Cho tập lồi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, hàm số $f : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *hàm lồi mạnh* trên A nếu tồn tại một hằng số $\rho > 0$ (*hằng số lồi mạnh*) sao cho với mọi $x, y \in A$, và mọi $\lambda \in [0; 1]$ ta có bất đẳng thức:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\rho \parallel x - y \parallel^2 .$$

Định lí 1.3. *Nếu f là hàm lồi mạnh và khả vi trên tập lồi đóng $K \subseteq \mathbb{R}^n$ thì:*

1. $\langle \bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(y), x - y \rangle \geq \rho \parallel x - y \parallel^2$.

2. *Với bất kỳ* $x^0 \in K$, *tập mức dưới* $K_0 = \{x \in K : f(x) \leq f(x^0)\}$ *bị chặn.*

3. *Tồn tại duy nhất điểm* $x^* \in K$ *sao cho* $f(x^*) = min\{f(x) : x \in K\}$.

Định nghĩa 1.6. Cho hàm bất kỳ $f : K \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ với $K \subseteq \mathbb{R}^n$, ta gọi các tập

$$domf = \{x \in K : f(x) < +\infty\}$$

và

$$epif = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

lần lượt là *miền hữu dụng* và *tập trên đồ thị* của hàm f.
Hàm f được gọi là *hàm chính thường* nếu $domf \neq \varnothing$ và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in K$.

Định nghĩa 1.7. Cho hàm lồi chính thường f trên $\mathbb{R}^n$, vectơ $p \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *dưới gradient* của f tại điểm x^0 nếu

$$\langle p, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Tập tất cả các dưới gradient của f tại x^0 được gọi là *dưới vi phân* của f tại điểm x^0 và được ký hiệu $\partial f(x^0)$.
Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \varnothing$.

Định lí 1.4. *Cho* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *là hàm lồi chính thường. Khi đó, nếu* f *có tại* x^0 *một vectơ dưới gradient duy nhất (tức là* $\partial f(x^0)$ *chứa duy nhất một phần tử) thì* f *khả vi tại* x^0.

Định nghĩa 1.8. Cho M là tập con của không gian $\mathbb{R}^n$. Tập M được gọi là tập *compact* trong $\mathbb{R}^n$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ đều chứa một dãy con hội tụ tới $x_0 \in M$.
Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập compact khi và chỉ khi M là tập bị chặn và đóng.

Định nghĩa 1.9. Ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là ma trận đối xứng nếu $M^T = M$.

Định nghĩa 1.10. Cho ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ với các phần tử $m_{ij}(x) : i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$ là các hàm số xác định trên tập $S \subset \mathbb{R}^n$, là *nửa xác định dương* trên S nếu với mỗi $x \in S$, ta có

$$v^T M(x)v \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Ma trận $M(x) \in \mathbb{R}^{n\cdot n}$ là *xác định dương* trên S nếu với mỗi $x \in S$, ta có

$$v^T M(x)v > 0, \forall v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n.$$

Ma trận $M(x) \in \mathbb{R}^{n\cdot n}$ là *xác định dương mạnh* trên S nếu với mỗi $x \in S$, ta có

$$v^T M(x)v \geq \alpha \parallel v \parallel^2, \alpha > 0.\forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa 1.11. Ánh xạ $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là *đơn điệu* trên K nếu:

$$[f(x^1) - f(x^2)]^T (x^1 - x^2) \geq 0, \forall x^1, x^2 \in K.$$

Ánh xạ $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là *đơn điệu chặt* trên K nếu:

$$[f(x^1) - f(x^2)]^T (x^1 - x^2) > 0, \forall x^1, x^2 \in K.$$

Ánh xạ $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là *đơn điệu mạnh* trên K nếu:

$$[f(x^1) - f(x^2)]^T (x^1 - x^2) \geq \alpha \parallel x^1 - x^2 \parallel^2, \forall x^1, x^2 \in K.$$

Định nghĩa 1.12. Hàm số f xác định trên $K \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *liên tục* tại $x_0 \in K$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, nhỏ tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Hàm số f gọi là liên tục trên K nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in K$.

Định nghĩa 1.13. Hàm số f được gọi là *liên tục Lipschitz* trên tập K nếu tồn tại số $L > 0$ sao cho

$$|f(x^1) - f(x^2)| \leq L \parallel x^1 - x^2 \parallel, \forall x^1, x^2 \in K.$$

Định lí 1.5. *Giả sử $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là khả vi, liên tục trên tập K và ma trận Jacobi*

$$\bigtriangledown F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{trong đó } F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$$

là nửa xác định dương (xác định dương). Khi đó, F là đơn điệu (đơn điệu chặt).

Định lí 1.6. *Giả sử $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là khả vi, liên tục trên tập mở chứa K, $\bigtriangledown F(x)$ xác định dương mạnh. Khi đó F là đơn điệu mạnh.*