ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ THU DUNG

VỀ DÃY LỌC CHÍNH QUY CHẶT VÀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY CHÍNH TẮC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Thái Nguyên - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của cá nhân tôi. Các nội dung trình bày trong luận văn là kết quả làm việc của tôi.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Tác giả luận văn

Trần Thị Thu Dung

Xác nhận của Trưởng khoa chuyên môn	Xác nhận của Người hướng dẫn khoa học
	PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn

LỜI CẢM ƠN

Bằng sự biết ơn sâu sắc, em xin chân thành cảm ơn PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Xin chân thành cảm ơn các thầy giáo Viện Toán và các thầy cô Khoa Toán, Khoa Sau đại học, cán bộ Phòng Quản lý khoa học - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi cũng xin được bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới người thân, đồng nghiệp, bạn bè đã động viên, quan tâm chia sẻ và tạo mọi điều kiện giúp tôi hoàn thành tốt khoá học này.

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng, song luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy giáo, cô giáo và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Tác giả luận văn

Trần Thị Thu Dung

Mục lục

Trang

MỞ ĐẦU

Trong suốt luận văn này, giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$ và A là R-môđun Artin. Kí hiệu $\operatorname{Ass}_R M$ là tập các iđêan nguyên tố liên kết của M. Theo I. G. Macdonald [Mac], kí hiệu tập iđêan nguyên tố gắn kết của A là $\operatorname{Att}_R A$.

Trong một bài báo năm 1978, Nguyễn Tự Cường, Peter Schenzel và Ngô Việt Trung [CST] đã giới thiệu khái niệm f-dãy (dãy lọc chính quy) của M và cho thấy vai trò quan trọng của nó trong việc nghiên cứu cấu trúc của môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Từ đó đến nay, f-dãy đã được hàng trăm tác giả trích dẫn, sử dụng để nghiên cứu những vấn đề khác nhau của Đại số giao hoán. Luận văn này đề cập đến một trường hợp đặc biệt của f-dãy, đó là khái niệm f-dãy chặt giới thiệu bởi N.T. Cường, Marcel Morales và L. T. Nhàn [CMN].

Với mỗi iđêan I của R, Sharp [Sh] đã chỉ ra rằng $\operatorname{Att}_R(0 :_A I^n)$ không phụ thuộc vào n khi n đủ lớn và vì thế tập hợp $\bigcup_n \operatorname{Att}_R(0 :_A I^n)$ là hữu hạn. Ta cũng đã biết rằng, môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn là Artin với mọi số nguyên i. Do đó một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu các tập hợp $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k} \operatorname{Att}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} (x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k})R)$ và $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k} \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k})M)$ có là các tập hữu hạn hay không với mỗi số nguyên i và mỗi dãy $(x_1, \ldots, x_k)$ các phần tử của R. Câu trả lời trong trường hợp tổng quát là "không". Chẳng hạn, M. Katzman trong một bài báo đăng trên J. Algebra năm 2002 đã xây dựng một vành Cohen-Macaulay Noether địa phương $(T, \mathfrak{m})$ với hai phần tử $u, v \in \mathfrak{m}$ sao cho $\dim T = 5$, $\dim T/(u, v)T = 4$ và $\operatorname{Ass}_R H^2_{(u,v)T}(T)$ là một tập vô hạn. Vì thế tập $\bigcup_n \operatorname{Ass}_R(R/(u^n, v^n)R)$ là vô hạn và do đó $\bigcup_n \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(T/(u^n, v^n)T))$ là một tập vô hạn với i nào đó. Câu hỏi tiếp theo là tìm điều kiện của dãy $(x_1, \ldots, x_k)$ để các tập iđêan nguyên tố gắn kết ở trên là hữu hạn. N. T. Cường, Marcel Morales, L. T. Nhàn [CMN] đã chứng minh tính hữu hạn cho hai tập hợp trên khi $(x_1, \ldots, x_k)$ là f-dãy chặt. Đến năm 2006, L. T. Nhàn [Nh] đã đặc trưng các môđun Cohen-Macaulay chính tắc thông qua f-dãy chặt.

Mục đích của luận văn là trình bày lại các tính chất cơ sở của f-dãy chặt, một kết quả hữu hạn của tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương trong bài báo của N. T. Cuong, M. Morales, L. T. Nhan [CMN] , và một đặc trưng môđun Cohen-Macaulay chính tắc thông qua f-dãy chặt trong bài báo của L. T. Nhan [Nh].

Luận văn gồm 2 chương. Chương I nhắc lại kiến thức cơ sở về biểu diễn thứ cấp, tập iđêan nguyên tố gắn kết và một số chuẩn bị về môđun đối đồng điều địa phương phục vụ cho chương sau. Chương II đưa ra các kết quả chính của luận văn. Các khái niệm và tính chất của f-dãy và f-dãy chặt được trình bày trong các tiết 2.1, 2.2. Trong Tiết 2.3, chúng tôi chứng minh các tập $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k} \mathrm{Att}_R(0 :_{H^i_{\mathfrak{m}}(M)} (x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k})R)$ và $\bigcup_{n_1,\ldots,n_k} \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k})M))$ là hữu hạn với mọi f-dãy chặt $(x_1, \ldots, x_k)$ của M. Tiết cuối 2.4 dành để chứng minh một đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay chính tắc thông qua f-dãy chặt.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt chương này luôn giả thiết R là một vành giao hoán Noether. Mục đích của Chương I là nhắc lại một số kiến thức cơ sở phục vụ cho phát biểu và chứng minh các kết quả ở Chương 2. Tiết 1.1 trình bày một số khái niệm về biểu diễn thứ cấp. Tiết 1.2 nhắc lại một số kết quả về tập iđêan nguyên tố gắn kết cho môđun Artin. Các tiết 1.1 và 1.2 được tham khảo từ bài báo của I. G. Macdonald [Mac]. Tiết 1.3 trình bày một số khái niệm và tính chất cần thiết về môđun đối đồng điều địa phương trong cuốn sách của M. Brodmann và R. Y. Sharp [BS].

1.1 Biểu diễn thứ cấp

Trong suốt tiết này, giả thiết L là một R-môđun (không nhất thiết hữu hạn sinh và cũng không nhất thiết Artin).

1.1.1 Định nghĩa. i) Cho $x \in R$. Nếu tồn tại một số tự nhiên n để $x^n L = 0$ thì ta nói phép nhân bởi x trên L là *luỹ linh*. Nếu $xL = L$ thì ta nói phép nhân bởi x trên L là *toàn cấu*.

ii) Ta nói L là môđun *thứ cấp* nếu $L \neq 0$ và phép nhân bởi x trên L là toàn cấu hoặc lũy linh với mọi $x \in R$. Trong trường hợp này, tập hợp các phần tử $x \in R$ sao cho phép nhân bởi x trên L là lũy linh làm thành một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ và ta gọi L là $\mathfrak{p}$-thứ cấp.

iii) Một biểu diễn $L = L_1 + \ldots + L_n$, trong đó mỗi L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp, được gọi là *một biểu diễn thứ cấp* của L.

iv) L là *biểu diễn được* nếu $L = 0$ hoặc L có biểu diễn thứ cấp.

(v) Biểu diễn thứ cấp $L = L_1 + \ldots + L_n$ được gọi là *tối thiểu* nếu các $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và mỗi L_i là không thừa, tức là với mọi i,

$$L \neq L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_n.$$

1.1.2 Chú ý. Từ định nghĩa của môđun thứ cấp ta có:

i) Tổng trực tiếp của hữu hạn môđun $\mathfrak{p}$-thứ cấp là $\mathfrak{p}$-thứ cấp.

ii) Môđun thương khác 0 của một môđun $\mathfrak{p}$-thứ cấp là $\mathfrak{p}$-thứ cấp.

iii) Nếu $L_1, \ldots, L_r$ là môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của L thì $L_1 + \ldots + L_r$ là môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của L.

1.1.3 Hệ quả. *Mỗi biểu diễn thứ cấp đều có thể quy về tối thiểu.*

Chứng minh. Giả sử $L = L_1 + \ldots + L_n$ là một biểu diễn thứ cấp của R-môđun L. Theo Chú ý 1.1.2, bằng cách loại đi các thành phần thứ cấp thừa và ghép lại những thành phần thứ cấp ứng với cùng một iđêan nguyên tố, ta có thể rút gọn biểu diễn thứ cấp này thành một biểu diễn thứ cấp tối thiểu. □

Phần tiếp theo trình bày hai định lí duy nhất của biểu diễn thứ cấp.

1.1.4 Bổ đề. *Giả sử $L = L_1 + \ldots + L_n$ là một biểu diễn thứ cấp tối thiểu của L với L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp. Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Các phát biểu sau là tương đương:*

i) $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

ii) L có môđun thương là $\mathfrak{p}$-thứ cấp.

iii) L có môđun thương Q sao cho $\operatorname{Ann}_R Q = \mathfrak{p}$.

Chứng minh. (i⇒ii). Giả sử $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Đặt $P_i = \sum_{j \neq i} L_j$. Vì L_i không thừa trong biểu diễn thứ cấp $L = L_1 + \ldots + L_n$ nên $L/P_i \neq 0$. Hơn nữa,

$$L/P_i = (L_i + P_i)/P_i \cong L_i/(L_i \cap P_i).$$

Vì L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp nên theo Chú ý 1.1.2, L/P_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp của L.
(ii⇒iii). Giả sử P là môđun thương $\mathfrak{p}$-thứ cấp của L. Vì R là vành Noether nên $\mathfrak{p}$ là hữu hạn sinh. Giả sử $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_t)$. Vì P là $\mathfrak{p}$-thứ cấp nên với mỗi $i = 1, \ldots, t$, tồn tại n_i sao cho $a_i^{n_i} P = 0$. Chọn $n = \max\{n_1, \ldots, n_t\}$. Khi đó $\mathfrak{p}^k P = 0$ với mọi $k \geq nt$. Do P là $\mathfrak{p}$-thứ cấp nên $P \neq 0$. Ta khẳng định $P \neq \mathfrak{p}P$. Thật vậy, nếu $P = \mathfrak{p}P$ thì với $k \geq nt$ ta có

$$0 = \mathfrak{p}^k P = \mathfrak{p}^{k-1}(\mathfrak{p}P) = \mathfrak{p}^{k-1}P = \ldots = \mathfrak{p}P = P,$$

điều này là mâu thuẫn. Vì thế $Q = P/\mathfrak{p}P$ là môđun thương khác 0 của L. Do P là $\mathfrak{p}$-thứ cấp nên Q là $\mathfrak{p}$-thứ cấp. Do đó $\operatorname{Ann}_R Q \subseteq \mathfrak{p}$. Rõ ràng $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R Q$. Suy ra $\operatorname{Ann}_R Q = \mathfrak{p}$.
(iii⇒i). Giả sử môđun thương $Q = L/B$ thỏa mãn $\operatorname{Ann}_R Q = \mathfrak{p}$. Ta có

$$Q = L/B = (\sum_{i=1}^{n} L_i)/B = \sum_{i=1}^{n} (L_i + B)/B.$$

Với mỗi i ta có $(L_i + B)/B \cong L_i/(L_i \cap B)$. Do đó, theo Chú ý 1.1.2(ii), nếu $(L_i + B)/B \neq 0$ thì nó là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp. Bằng việc bỏ đi các thành phần thừa trong biểu diễn $Q = \sum_{i=1}^{n}(L_i + B)/B$ ta được một biểu diễn tối thiểu của Q. Do đó bằng việc đánh lại thứ tự các chỉ số ta có thể giả thiết Q có một biểu diễn thứ cấp tối thiểu $Q = \sum_{i=1}^{m} Q_i$, trong đó Q_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp với $i = 1, \ldots, m$ với một số tự nhiên $m \leqslant n$ nào đó. Do Q_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp với mọi $i = 1, \ldots, m$ nên dễ kiểm tra được $\sqrt{\operatorname{Ann}_R(Q)} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$. Vì thế, theo giả thiết (iii) ta có $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$. Do đó tồn tại $i \in \{1, \ldots, m\}$ sao cho $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. □

Định lí sau đây là hệ quả trực tiếp của Bổ đề 1.1.4.

1.1.5 Định lý. *(**Định lí duy nhất thứ nhất**) Giả sử $L = L_1 + \ldots + L_n$ và $L = L'_1 + \ldots + L'_m$ là hai biểu diễn thứ cấp tối thiểu của L với L_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp và L'_i là $\mathfrak{q}_i$-thứ cấp. Khi đó $m = n$ và*

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}.$$

Theo Định lí duy nhất thứ nhất, tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn thứ cấp tối thiểu của L. Chú ý rằng tồn tại hai biểu diễn thứ cấp tối thiểu của L mà các thành phần thứ cấp ứng với cùng một iđêan nguyên tố là khác nhau. Tuy nhiên, nếu iđêan nguyên tố ấy là tối thiểu trong tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ thì thành phần thứ cấp tương ứng là xác định duy nhất. Đó là nội dung của định lí duy nhất thứ hai.

1.1.6 Định lý. *(**Định lí duy nhất thứ hai**) Giả sử $L = L_1 + \ldots + L_n$ và $L = L'_1 + \ldots + L'_n$ là hai biểu diễn thứ cấp tối thiểu của L với L_i, L'_i là $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp. Nếu $\mathfrak{p}_i \in \min\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ thì $L_i = L'_i$.*

Chứng minh. Vì $\mathfrak{p}_i$ tối thiểu, tức là $\mathfrak{p}_j \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ với mọi $j \neq i$ nên tồn tại phần tử $a \in (\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{p}_j) \setminus \mathfrak{p}_i$. Với $j \neq i$, do $a \in \mathfrak{p}_j$ nên $a^n L_j = 0 = a^n L'_j$ với n đủ lớn. Do $a \notin \mathfrak{p}_i$ nên $a^n L_i = L_i$ và $a^n L'_i = L'_i$ với mọi n. Vì thế với n đủ lớn ta có $a^n L = L_i = L'_i$. $\square$

Phần cuối của tiết này trình bày tính biểu diễn được của môđun Artin. Từ nay đến hết tiết này, giả thiết $A \neq 0$ là một R-môđun Artin.

1.1.7 Bổ đề. *Nếu A không là tổng của hai môđun con thực sự thì A là thứ cấp.*

Chứng minh. Giả sử A không thứ cấp. Khi đó tồn tại $x \in R$ sao cho phép nhân bởi x trên A không toàn cấu và cũng không là luỹ linh. Vì thế