BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯƠNG MINH TUYÊN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA MỘT HỌ HỮU HẠN CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. GS. TS. Nguyễn Bường
2. GS. TS. Jong Kyu Kim

THÁI NGUYÊN-NĂM 2014

LỜI CAM ĐOAN

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Nguyễn Bường và GS. TS. Jong Kyu Kim. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan của mình.

Tác giả

Trương Minh Tuyên

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TS. Nguyễn Bường và GS. TS. Jong Kyu Kim. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng và seminar tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và những ý kiến đóng góp quý báu của GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, PGS. TS. Phạm Ngọc Anh, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, PGS. TS. Phạm Việt Đức, TS. Đào Thị Liên, GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, TS. Hà Trần Phương, TS. Vũ Vinh Quang, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, GS. TSKH. Đỗ Đức Thái, GS. TS. Trần Vũ Thiệu, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, TS. Vũ Mạnh Xuân. Từ đáy lòng mình tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các Thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán, khoa Sau đại học và Ban giám hiệu trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả có thể hoàn thành luận án của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, trường Đại học Sư phạm và các thầy cô trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, cùng toàn thể anh chị em nghiên cứu sinh chuyên ngành Toán Giải tích, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tác giả trong suốt quá trình học tập, seminar, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này.

Tác giả

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
θ	phần tử không của không gian Banach E
$\dim(E)$	số chiều của không gian Banach E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\cap$	phép giao
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm khả tích bậc p trên Ω
l^p	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$d(x, M)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp M
$\mathcal{H}(C_1, C_2)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp C_1 và C_2
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$

$\alpha_n \searrow \alpha_0$	dãy số thực $\{\alpha_n\}$ hội tụ giảm về α_0
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$d(a, M)$	khoảng cách tử phần tử a đến tập hợp M
$W_p^m(\Omega)$	không gian Sobolev
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t
$n_{[a,b]}$	số điểm chia cách đều trên đoạn $[a, b]$
$n_{\max}$	số bước lặp tối đa
tg	thời gian tính toán
err	sai số của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm chính xác
$\mathrm{int}(C)$	phần trong của tập hợp C

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in I}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E". Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học ... (xem [28], [29], [30], [43], [57], [58], [71], [72], [81] ...).

Khi $C_i = Fix(T_i)$, với $Fix(T_i)$ là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T_i,\ i = 1, 2, ..., N$, thì đã có nhiều phương pháp được đề xuất dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng. Đó là các phương pháp lặp Kranoselskii [55], Mann [62], Ishikawa [45], Halpern [42] và phương pháp xấp xỉ mềm [65]. Chẳng hạn, tương tự như phương pháp chiếu xoay vòng để giải bài toán chấp nhận lồi trong không gian Hilbert, năm 1996 Bauschke H. H. [16] đã đề xuất phương pháp lặp xoay vòng dựa trên phương pháp lặp Halpern cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert... Các kết quả nghiên cứu theo những hướng này có thể xem trong các tài liệu [16], [31], [46], [69], [70] ...

Ta biết rằng, nếu T là một ánh xạ không giãn trong không gian Banach E, thì toán tử $A = I - T$ là một toán tử j-đơn điệu, với I là toán tử đồng nhất trên E. Như vậy, bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn T_i trong không gian Banach E có thể đưa về bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử j-đơn điệu $A_i = I - T_i$ với $i = 1, 2, ..., N$.

Khi $A : H \longrightarrow 2^H$ một toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert H, thì Rockafellar R. T. [77] đã đề xuất phương pháp điểm gần kề để xác định dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$c_nAx_{n+1} + x_{n+1} \ni x_n,\ x_0 \in H, \tag{0.1}$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp lặp (0.1) chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A.

Năm 2001, Attouch H. và Alvarez F. [14] đã xét một mở rộng của phương pháp điểm gần kề (0.1) ở dạng

$$c_nA(x_{n+1}) + x_{n+1} - x_n \ni \gamma_n(x_n - x_{n-1}),\ x_0, x_1 \in H \tag{0.2}$$

và gọi là phương pháp điểm gần kề quán tính, ở đây $\{c_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là hai dãy số không âm. Đối với thuật toán mở rộng này thì người ta cũng chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy lặp $\{x_n\}$ về một không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A trong không gian Hilbert.

Khi $A:\ E \longrightarrow E$ là một toán tử m-j-đơn điệu từ không gian Banach E vào chính nó, năm 2002 Ryazantseva I. P. [78] đã kết hợp phương pháp điểm gần kề với hiệu chỉnh và gọi là phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh ở dạng

$$c_n(A(x_{n+1}) + \alpha_n x_{n+1}) + x_{n+1} = x_n,\ x_0 \in E. \tag{0.3}$$

Ryazantseva I. P. đã chỉ ra sự sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (0.3) về một không điểm của A khi không gian Banach E và các dãy số dương $\{c_n\}$ và $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn các điều kiện thích hợp.

Năm 2006 tác giả Xu H. K. [85] và năm 2009 các tác giả Song Y., Yang C. [80] đã đề xuất và nghiên cứu một cải biên của phương pháp điểm gần kề cho bài toán xác định không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A trong không gian Hilbert, ông đã chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_{n+1} = J_{r_n}^A(t_nu + (1-t_n)x_n + e_n),\ n = 0, 1, 2, ... \tag{0.4}$$

với một số điều kiện thích hợp đặt lên dãy số $\{t_n\}$ và dãy sai số tính toán trong mỗi bước lặp $\{e_n\}$, trong đó $J_{r_n}^A = (I + r_nA)^{-1}$.

Đối với bài toán tìm nghiệm chung của một họ hữu hạn các phương trình toán tử với các toán tử đơn điệu cực đại, năm 2006 tác giả Buong Ng. [23] đã đề xuất và nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử đơn trị đơn điệu, thế năng, h-liên tục từ không gian Banach E vào không gian đối ngẫu E^*. Ông đã quy bài toán giải hệ phương trình với các toán tử đơn điệu cực đại về việc giải một phương trình toán tử và thu được sự hội tụ mạnh của thuật toán về một nghiệm của hệ khi các tham số hiệu chỉnh được chọn thích hợp.

Năm 2008, trên cơ sở kết quả nghiên cứu đạt được của mình vào năm 2006, tác giả Buong Ng. [24] lần đầu tiên nghiên cứu kết hợp phương pháp điểm gần kề quán tính với hiệu chỉnh và gọi là phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh, cho việc giải bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử đơn điệu cực đại $A_i = \partial f_i$, với ∂f_i là dưới vi phân của các phiếm hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới yếu f_i, $i = 1, 2, ..., N$ trong không gian Hilbert H. Ông đã chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z_n\}$ xác định bởi

$$c_n\Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_n^j A_j^n(z_{n+1}) + \alpha_n^{N+1} z_{n+1}\Big) + z_{n+1} - z_n \ni \gamma_n(z_n - z_{n-1}),$$

trong đó $z_0, z_1 \in H$, $\{c_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực không âm và A_j^n là các toán tử đơn điệu cực đại xấp xỉ toán tử dưới vi phân $\partial\varphi_j$ của phiếm hàm φ_j theo nghĩa dưới đây

$$\mathcal{H}(A_j^n(x), \partial\varphi_j(x)) \le h_n g(\|x\|),$$

với g là một hàm không âm, giới nội.

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn hay vô hạn ánh xạ không giãn, cùng với các bài toán liên quan như bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình với các toán tử loại đơn điệu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng ... cũng được nhiều nhà toán học trong nước quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn như: Năm 2004 Anh P. N. và Muu L. D. [5] đã kết hợp nguyên lý ánh xạ co với phương pháp điểm gần kề cho bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu; năm 2009 Anh P. K. và Chung C. V. [3] đã nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh lặp song song ở dạng ẩn và hiện cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử xác định dương từ không gian Hilbert H vào chính nó; Thuy N. T. T. [84] đã xây dựng phương pháp lặp mới cho bài toán tìm nghiệm của một bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn