ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
========o0o========

TRƯƠNG THỊ THÚY

VÀNH VÀ MÔĐUN COHEN - MACAULAY

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn này là hoàn toàn trung thực, chưa được sử dụng cho bảo vệ một học vị nào. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của các cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trình bày trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2013

Học viên

Trương Thị Thuý

Xác nhận	**Xác nhận**
của trưởng khoa chuyên môn	**của người hướng dẫn khoa học**
	TS. Trần Nguyên An

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của TS. Trần Nguyên An. Nhờ Thầy tôi đã bước đầu làm quen và say mê trong công việc nghiên cứu toán. Nhân dịp này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, TS. Lê Thanh Nhàn, TS. Phạm Hiến Bằng đã tận tình giảng dạy để tôi nắm được những kiến thức cơ sở. Tôi rất biết ơn trường ĐHSP Thái Nguyên, khoa Toán và tổ Đại số đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện kế hoạch học tập của mình. Tôi xin cảm ơn người thân, đồng nghiệp, bạn bè đã cổ vũ động, viên tôi trong quá trình làm luận văn.

Mục lục

Lời nói đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **2**

1.1 Chiều và độ cao 2

1.2 Môđun đối đồng điều địa phương 3

2 Vành và môđun Cohen-Macaulay **5**

2.1 Độ sâu của môđun 5

2.2 Vành và môđun Cohen-Macaulay 23

3 Hệ số Hilbert của vành và môđun Cohen - Macaulay **32**

3.1 Đa thức Hilbert và số bội 32

3.2 Hệ số Hilbert thứ 0 và thứ nhất của vành Cohen-Macaulay . . . 34

Tài liệu tham khảo 42

Lời nói đầu

Vành và môđun Cohen-Macaulay là lớp vành và môđun quan trọng trong Đại số giao hoán. Lớp vành này có nhiều ứng dụng trong Hình học đại số, Lý thuyết bất biến và Tổ hợp. Khái niệm vành Cohen-Macaulay được nảy sinh từ các định lý không trộn lẫn của Macaulay và Cohen. Khái niệm môđun Cohen-Macaulay được xuất hiện lần đầu tiên trong các công trình của Auslander và Buchsbaum. Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là A- môđun hữu hạn sinh. Ta ký hiệu hai bất biến quan trọng $\operatorname{depth} M$ là độ sâu của M và $\dim M$ là chiều của M. Ta có $\operatorname{depth} M \leq \dim M$ nếu M khác không. Ta nói rằng M là *Cohen - Macaulay* nếu $M = 0$ hoặc $\operatorname{depth} M = \dim M$. Nếu vành Noether địa phương A là Cohen- Macaulay thì ta nói A là vành Cohen - Macaulay.

Luận văn trình bày một số tính chất và đặc trưng cơ bản của vành và môđun Cohen-Macaulay. Luận văn được chia làm 3 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở như định nghĩa chiều và độ sâu, chiều Krull.... Đây là những công cụ cơ bản nhất cho những nghiên cứu được trình bày trong luận văn. Định nghĩa và tính chất của Môđun đối đồng điều cũng được trình bày của cuối chương.

Chương 2 là một chương quan trọng của luận văn. Chương này nghiên cứu về vành và môđun Cohen - Macaulay. Phần đầu chương là định nghĩa chiều và độ sâu cùng các tính chất. Trong chương cũng trình bày định nghĩa vành chính quy, vành tựa chính quy. Phần 2 của chương tôi trình bày vành, môđun Cohen - Macaulay và các tính chất. Chứng minh nếu A là vành Cohen - Macaulay thì một vành đa thức $A[x_1, ..., x_n]$ cũng là vành Cohen - Macaulay do đó bất kì vành Cohen - Macaulay là catenary.

Chương 3 trình bày về hệ số Hilbert của vành và môđun Cohen - Macaulay, định lý đa thức Hilbert. Hệ số e_0, e_1 cũng được trình bày ở chương này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt chương này cũng như trong luận văn, ta luôn giả thiết A là vành giao hoán có đơn vị. Chương này chỉ nhắc lại một số kiến thức cần thiết để trình bày các chương sau.

1.1 Chiều và độ cao

Định nghĩa 1.1.1. Một dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_n$ của vành A được gọi là một xích nguyên tố có độ dài là n. Cận trên đúng của độ dài tất cả các xích nguyên tố trong A được gọi là chiều Krull của A, hay chiều của vành A. Kí hiệu là $\dim A$.

Định nghĩa 1.1.2. Cận trên đúng của độ dài các dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_r$$

xuất phát từ $\mathfrak{p}$, được gọi là độ cao của $\mathfrak{p}$, kí hiệu là $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$. Cho I là một iđêan của A. Độ cao của iđêan I,kí hiệu $\operatorname{ht} I$ được cho bởi công thức $\operatorname{ht} I = \inf\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in V(I)\}$ trong đó $V(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của A chứa I.

Định nghĩa 1.1.3. Cho M là một A - môđun. Khi đó chiều của M kí hiệu là $\dim M$ được xác định bởi $\dim M = \dim(A/\operatorname{Ann} M)$, trong đó $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid aM = 0\}$.

Chú ý rằng chiều của một môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương luôn là một số hữu hạn.

Mệnh đề 1.1.4. *(i) Nếu* $(A, \mathfrak{m})$ *là một vành địa phương thì* $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$.

(ii) Cho $\mathfrak{p}$ *là một iđêan nguyên tố của vành A, khi đó* $\dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$.

Định lý 1.1.5. *Giả sử* $\phi : A \longrightarrow B$ *là một đồng cấu của các vành Noether. Giả sử* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *và đặt* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$*. Khi đó*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B).$$

Dấu $" = "$ *xảy ra nếu* ϕ *là đồng cấu phẳng.*

Định nghĩa 1.1.6. Cho $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ là các iđêan nguyên tố của A. Một dãy các iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ được gọi là một dãy nguyên tố *bão hòa* giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ nếu với mọi i, không tồn tại một iđêan nguyên tố chèn giữa $\mathfrak{p}_i$ và $\mathfrak{p}_{i+1}$.

Ta nói rằng vành A là *catenary* nếu với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ của R luôn tồn tại một dãy nguyên tố bão hoà giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ và mọi dãy nguyên tố bão hoà giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ đều có chung độ dài.

Vành A được gọi là *catenary phổ dụng* nếu A là vành Noether và mọi A-đại số hữu hạn sinh là catenary.

Như vậy vành Noether A là catenary phổ dụng nếu A là catenary và $A[x_1, ..., x_n]$ là catenary với mọi $n \geq 0$.

1.2 Môđun đối đồng điều địa phương

Định nghĩa 1.2.1. Cho I là iđêan của A. Với mỗi $A-$môđun N ta định nghĩa $\Gamma_I(N) = \bigcup\limits_{n \geq 0} (0 :_N I^n)$. Nếu $f : N \longrightarrow N'$ là đồng cấu các $A-$ môđun thì ta có đồng cấu $f^* : \Gamma_I(N) \longrightarrow \Gamma_I(N')$ cho bởi $f^*(x) = f(x)$. Khi đó $\Gamma_I(-)$ là hàm tử khớp trái từ phạm trù các $A-$môđun đến phạm trù các $A-$môđun và được gọi là *hàm tử $I-$xoắn*.

Một *giải nội xạ* của M là một dãy khớp

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \dots$$

trong đó mỗi E_i là môđun nội xạ. Chú ý rằng với mỗi môđun đều nhúng được vào một môđun nội xạ, vì thế, mỗi môđun đều có giải nội xạ.

Định nghĩa 1.2.2. Cho N là $A-$môđun và I là iđêan của A. Môđun dẫn suất phải thứ n của hàm tử $I-$xoắn $\Gamma_I(-)$ ứng với M được gọi là môđun *đối đồng điều thứ* n của N, kí hiệu là $H_I^n(M)$. Cụ thể, nếu

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_0 \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \longrightarrow \dots$$

là giải nội xạ của N, tác động hàm tử $\Gamma_I(-)$ ta có phức

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{u_0^*} \Gamma(E_1) \xrightarrow{u_1^*} \Gamma(E_2) \longrightarrow \dots$$

Khi đó $H_I^n(N) = \operatorname{Ker} u_n^* / \operatorname{Im} u_{n-1}^*$ là môđun đối đồng điều thứ n của phức trên (nó không phụ thuộc vào việc chọn giải nội xạ của N).

Sau đây là tính chất cơ bản của môđun đối đồng điều địa phương.

Mệnh đề 1.2.3. *Cho M là một $A-$môđun.*

(i) $H_I^0(M) \cong \Gamma_I(M)$.

(ii) Nếu M là nội xạ thì $H_I^n(M) = 0$ với mọi $i \geq 1$.

(iii) Nếu M là $I-$xoắn (tức là $M = \Gamma_I(M)$) thì $H_I^n(M) = 0$ với $i \geq 1$.

(iv) Với $\overline{M} = M/\Gamma_I(M)$ ta có $H_I^n(M) \cong H_I^n(\overline{M})$ với $n \geq 1$.

(v) Nếu $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ là dãy khớp ngắn thì với mỗi n có đồng cấu nối $H_I^n(M'') \longrightarrow H_I^{n+1}(M')$ sao cho ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma_I(M') \longrightarrow \Gamma_I(M) \longrightarrow \Gamma_I(M'') \longrightarrow H_I^1(M') \\ \longrightarrow H_I^1(M) \longrightarrow H_I^1(M'') \longrightarrow H_I^2(M') \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Kết quả sau đây nói rằng chiều của một môđun có thể đặc trưng thông qua tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương.

Mệnh đề 1.2.4. *Cho I là iđêan của A. Khi đó $H_I^i(M) = 0$ với mọi $i >$ $\dim M$ và mọi $i < 0$. Đặc biệt*

$$\dim M = \operatorname{Sup}\{i \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0\}.$$

Chương 2

Vành và môđun Cohen-Macaulay

Trong suốt chương này ta giả thiết vành giao hoán, có đơn vị.

2.1 Độ sâu của môđun

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử A là một vành, M là một $A-$ môđun, $a_1, ..., a_r$ là một dãy các phần tử của A. Ta nói $a_1, ..., a_r$ là *một M-dãy chính quy (hoặc đơn giản là $M-$dãy)* nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

(i) $M \neq (a_1, ..., a_r)M$.

(ii) Với mỗi $i > 0$,

$$\frac{M}{(a_1, ...a_{i-1})M} \xrightarrow{a_1} \frac{M}{(a_1, ..., a_{i-1})M}$$

là một đơn cấu; nghĩa là a_1 không là ước của không trên $M/(a_1, ..., a_{i-1})M$ với $1 \leq i \leq n$.

Nếu $a_1, ..., a_r$ là một $M-$dãy chính quy thì $a_1, ...a_i$ cũng là một M - dãy chính quy với $i \leq r$. Khi tất cả các a_i thuộc iđêan I ta nói $a_1, ..., a_r$ là một M- *dãy chính quy trong I*. Hơn nữa, nếu không tồn tại $b \in I$ sao cho $a_1, ..., a_r, b$ là $M-$ dãy chính quy, khi đó $a_1, ...a_r$ được gọi là một M- dãy chính quy tối đại trong I. Nếu $M \to N$ là đẳng cấu A- môđun, khi đó một dãy là chính quy trên M khi và chỉ khi nó chính quy trên N.

Bổ đề 2.1.2. *Một dãy $a_1, ..., a_r$ với $r \geq 2$ là M- dãy chính quy khi và chỉ khi a_1 chính quy trên M và $a_2, ..., a_r$ là một M/a_1M- dãy chính quy. Nếu* *dãy $a_1, ..., a_r$ là một M- dãy chính quy tối đại trong I thì $a_2, ..., a_r$ là một M/a_1M- dãy chính quy tối đại trong I.*

Chứng minh. Với mọi iđêan $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, tồn tại đẳng cấu chính tắc của A- môđun $M/\mathfrak{b}M \cong N/\mathfrak{b}N$ với $N = M/\mathfrak{a}M$. Nếu $a_1, ..., a_r$ là M- dãy chính quy thì a_1 chính quy trên M, a_2 chính quy trên $N = M/a_1M$ và với $3 \leq i \leq r$, a_i chính quy trên

$$M/(a_1, ..., a_{i-1})M \cong N/(a_2, ..., a_{i-1})N.$$

Do đó $a_1, ..., a_r$ là một $N-$ dãy chính quy. Điều ngược lại chứng minh tương tự. $\square$

Tổng quát hơn, nếu $a_1, ..., a_r$ là một $M-$ dãy chính quy và ta đặt

$$N = M/(a_1, ..., a_r)M.$$

Nếu $b_1, ..., b_s$ là một $N-$ dãy chính quy thì $a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_s$ là một $M-$ dãy chính quy.

Bổ đề 2.1.3. *Nếu $a_1, ..., a_r$ là một $A-$ dãy chính quy và M là một A- môđun phẳng thì $a_1, ..., a_r$ cũng là $M-$ dãy chính quy với $(a_1, ..., a_r)M \neq M$.*

Chứng minh. Phép nhân bên trái với a_1 xác định một đơn cấu $A \to A$ vì a_1 là A- chính quy. Tensor với M và với M là phẳng ta thấy rằng phép nhân bên trái với a_1 cũng cho một đơn cấu $M \to M$. Tương tự tensor với đơn cấu a_2: $A/a_1 \to A/a_1$ ta được một đơn cấu $M/a_1M \to M/a_1M$... $\square$

Bổ đề 2.1.4. *Cho A là một vành và M là một A- môđun. Với số nguyên $n \geq 1$ cho trước, một dãy $a_1, ..., a_r$ là $M-$ dãy chính quy khi và chỉ khi nó là M^n- dãy chính quy.*

Chứng minh. Giả sử rằng dãy $a_1, ..., a_r$ là M- dãy chính quy. Ta chứng minh nó là M^n- chính quy theo quy nạp với r. Trong trường hợp $r = 1$ hiển nhiên đúng. Giả sử $r > 1$. Theo giả thiết quy nạp, dãy $a_1, ..., a_{r-1}$ là M^n- dãy chính quy. Đặt $L = (a_1, ..., a_{r-1})M$. Khi đó $(a_1, ..., a_{r-1})M^n = L^n$