ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN TỐ KHUYÊN

MỐI QUAN HỆ GIỮA NỘI DUNG ĐẠI SỐ CAO CẤP Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ TOÁN SƠ CẤP Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MỐI QUAN HỆ GIỮA NỘI DUNG ĐẠI SỐ CAO CẤP Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ TOÁN SƠ CẤP Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2013

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Do nhiều lý do trong quá trình học ở trường đại học sinh viên không nhận ra được, những chiếc cầu nối từ toán sơ cấp đến toán cao cấp.
Trên thực tế, chương trình, giáo trình, sách tham khảo và việc dạy toán cao cấp nói chung và đại số cao cấp nói riêng ở các trường sư phạm mang tính "hàn lâm". Cấu trúc của mỗi nội dung trong giáo trình toán cao cấp thường là: Định nghĩa (khái niệm), ví dụ (minh họa khái niệm), định lý, hệ quả .... Thể hiện mối quan hệ giữa các khái niệm và cuối cùng là ví dụ (thể hiện tính áp dụng định lý). Với phong cách hàn lâm ấy, các giáo trình toán cao cấp thường rất chặt chẽ, chính xác ngắn gọn và logic. Đặc thù nói trên hạn chế khả năng đề cập đến nguồn gốc xuất xứ của những khái niệm có nguồn gốc từ toán sơ cấp trong giáo trình toán cao cấp. Những chiếc cầu nối từ toán sơ cấp đến toán cao cấp không được chỉ ra hoặc được chỉ ra thì cũng rất mờ nhạt. Điều này làm cho rất nhiều sinh viên khi học toán cao cấp cho rằng: Toán cao cấp là một thế giới riêng, tách biệt với toán sơ cấp mà họ từng biết khi học ở phổ thông. Cũng không ít sinh viên sư phạm cho rằng: Ở các trường sư phạm cần gì phải học toán cao cấp nhiều? Chỉ cần học giỏi toán sơ cấp và các môn lý luận phương pháp dạy học là đủ. Thiết nghĩ, những suy nghĩ đó cần được cải thiện.

Trong môn toán ở trường phổ thông có nhiều khái niệm được định nghĩa theo con đường kiến tạo, mô tả; nhiều định lý toán học được diễn tả bằng quy nạp không hoàn toàn hoặc bằng thực nghiệm hoặc thừa nhận không chứng minh. Đó là sự khác biệt trong việc tiếp cận các tri thức toán của học sinh ở trường phổ thông và tiếp cận tri thức toán cao cấp của sinh viên ở trường đại học sư phạm. Chính điều này đã tác động trực tiếp đến nhận thức của sinh viên, họ bỡ ngỡ khi chuyển từ môi trường phổ thông sang môi trường học toán cao cấp ở trường đại học.

Nghiên cứu và giúp đỡ sinh viên tìm ra mối liên hệ hữu cơ giữa nội dung đại số cao cấp ở trường sư phạm với nội dung toán ở trường phổ thông hiện nay: Ở Đại học sư phạm Hà Nội có PGS.TS Đàm Văn Nhỉ, TS. Nguyễn Văn Dũng và các cộng sự. Điều này cho thấy hướng nghiên cứu của đề tài có tính thời sự.

Theo chúng tôi, việc chỉ ra mối liên hệ giữa kiến thức của đại số cao cấp của trường sư phạm với nội dung môn toán ở trường phổ thông sẽ vô cùng hữu ích với một giáo viên toán làm nhiệm vụ giảng dạy ở phổ thông. Chính vì vậy chúng tôi chọn đề tài: **"Mối quan hệ giữa nội dung đại số cao cấp ở trường đại học và toán sơ cấp ở trường phổ thông"**, làm hướng nghiên cứu và là đề tài cho luận văn cao học chuyên ngành phương pháp toán sơ cấp.

2. Mục đích của luận văn

Tìm hiểu mối quan hệ giữa nội dung đại số cao cấp ở trường đại học sư phạm với nội dung toán giảng dạy ở trường phổ thông.

3. Nhiệm vụ

- Tập chung phân tích mối quan hệ giữa các kiến thức về vành đa thức và nghiệm của đa thức trên $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, đa thức bất khả quy, đa thức đối xứng, ... với các dạng bài tập ở phổ thông.

4. Giới hạn phạm vi nghiên cứu

Vì nội dung đại số cao cấp rất rộng, do điều kiện về thời gian, trong luận văn này chúng tôi chỉ tập chung vào tìm hiểu các nội dung của đại số cao cấp về đa thức và nghiệm của đa thức trên $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, đa thức bất khả quy, đa thức đối xứng, ... tương ứng với nội dung toán ở phổ thông.

5. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm 2 chương

- Chương I. Mối liên hệ giữa bài toán tìm nghiệm với kiến thức đại số cao cấp.
- Chương II. Mối liên hệ giữa các bài toán về đa thức với kiến thức đại số cao cấp.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn để em tiếp tục hoàn thiện luận văn.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Trịnh Thanh Hải. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để em hoàn thiện luận văn của mình. Em xin được cảm ơn chân thành nhất tới Khoa Toán Tin, phòng ĐT-KH-QHQT, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản. Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian em học cao học và viết luận văn. Lời cuối em xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 3 năm 2013

Người thực hiện

Nguyễn Tố Khuyên

Chương 1

Mối liên hệ giữa bài toán tìm nghiệm với kiến thức đại số cao cấp

1.1 Một số kiến thức đại số cao cấp liên quan đến bài toán tìm nghiệm phương trình

Nghiệm của đa thức.

Định nghĩa 1.1.1.
Giả sử K là một trường số nào đó, A là trường con của K. Một phần tử $\alpha \in K$ gọi là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(\alpha) = 0$. Ta cũng nói α là nghiệm của phương trình đại số $f(x) = 0$. Nếu $degf(x) = n$ gọi là phương trình đại số bậc $n(n \geq 1)$.

Định lý 1.1.2 (Định lý Bezout).
Cho vành đa thức $A_{[x]}, f(x) \in A_{[x]}, \alpha \in A$. Dư trong phép chia f(x) cho $x - \alpha$ là $f(\alpha)$.

Hệ quả 1.1.3.
Phần tử $\alpha \in A$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$, nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $x - \alpha$ trong $A[x]$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha).q(x)$$

tức $f(\alpha) \vdots (x - \alpha)$.

Định lý 1.1.4. *Mọi đa thức*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in A[x] \ , \ \ a_0 \neq 0$$

có thể viết dưới dạng $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$ trong vành $K[x]$. Ở đây $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$ trong trường mở rộng K của A.

Chứng minh: (Dùng phương pháp quy nạp theo n).
- Nếu $n = 1$ thì $f(x) = a_0 x + a_1 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm duy nhất $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$ và ta thấy $f(x) = a_0(x + \dfrac{a_1}{a_0}) = a_0(x - \alpha_1)$.
- Giả sử mệnh đề trên đúng với đa thức bậc n-1, ta xét $f(x)$ mà $\deg f(x) = n > 1$. Cho thêm α_1 là nghiệm của $f(x)$. Khi đó

$$f(x) = (x - \alpha_1)q(x).$$

Dễ thấy $\deg q(x) = n - 1$, và hệ số trước bậc cao nhất của $q(x)$ trùng với hệ số a_0.
Theo giả thiết quy nạp, ta có: $q(x) = a_0(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)...(x - \alpha_n)$.
Trong đó, $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ là các nghiệm của đa thức $q(x)$. Khi đó tất cả các nghiệm của $f(x)$ là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ và $f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$ $\square$

Nhận xét: Mọi đa thức bậc lẻ luôn tồn tại ít nhất một nghiệm thực.

Nghiệm bội và tính chất của nghiệm bội.

Định nghĩa 1.1.5.
Giả sử k là một số tự nhiên khác 0. Một phần tử $\alpha \in A$ gọi là nghiệm bội cấp k của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - p\alpha)^k$ đồng thời không chia hết cho $(x - \alpha)^{k+1}$.

$$f(x) = (x - \alpha)^k q(x) \quad (q(\alpha) \neq 0),$$

$k = 1$ thì α gọi là nghiệm đơn.
$k = 2$ thì α gọi là nghiệm kép.

Định lý 1.1.6 (**Định lí cơ bản của đại số cổ điển).**
Mọi đa thức $f(x)$ với hệ số phức, $\deg f(x) \geq 1$ *có đúng n nghiệm phức, kể cả số bội của mỗi nghiệm.*

Công thức Viet.

Định lý 1.1.7. *Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in A[x]$, $a_0 \neq 0$ là một đa thức bất kì và $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$. Ở đây,*

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$. Khi đó,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k + ... + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}...\alpha_n = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_0} \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1 Gọi là công thức Viet.

Chứng minh. Từ $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$. Sau khi ta nhân các thừa số vào với nhau và nhóm các hệ số theo dạng đa thức chuẩn tắc ta được:

$$f(x) = a_0[x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_n) + (\alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 +$$

$$... + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} + ... + (-1)^n\alpha_1\alpha_2...\alpha_n].$$

So sánh các hệ số của đa thức, ta nhận được

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k + ... + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}...\alpha_n = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_0} \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

□

Nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.

Với mọi $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ luôn tìm được số nguyên $m \neq 0$ để $mf(x) = g(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (m-mẫu số chung các hệ số của $f(x)$).

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q} \ , \ \ f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0.$$

Do đó, để xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Q}$, ta chỉ cần xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Z}$.

Định lý 1.1.8. *Nếu u và v là những số nguyên tố cùng nhau và nếu số hữu tỉ $\alpha = \dfrac{u}{v}$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

thì $a_0 \vdots v$ và $a_n \vdots u$.

Chứng minh. Từ điều kiện $\dfrac{u}{v}$ là nghiệm của đa thức, ta có:

$$a_0(\frac{u}{v})^n + a_1(\frac{u}{v})^{n-1} + ... + a_{n-1}\frac{u}{v} + a_n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0u^n + a_1u^{n-1}v + ... + a_{n-1}uv^{n-1} + a_nv^n = 0.$$

Từ đó ta có

$$a_0u^n = v(a_1u^{n-1} + ... + a_{n-1}uv^{n-2} + a_nv^{n-1}) \tag{1.2}$$

và

$$a_nv^n = -u(a_0u^{n-1} + a_1u^{n-2}v + ... + a_{n-1}v^{n-1}) \tag{1.3}$$

Từ 1.2 suy ra $a_0u^n \vdots v$ mà $(u, v) = 1$ nên $a_0 \vdots v$.
Từ 1.3 suy ra $a_nv^n \vdots u$ mà $(u, v) = 1$ nên $a_n \vdots u$. □

Hệ quả 1.1.9.
●*Mọi nghiệm nguyên của đa thức với hệ số nguyên đều là ước của hạng tử tự do.*
●*Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên có hệ số cao nhất bằng 1 đều là nghiệm nguyên.*

Bài toán

Cho đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Chứng minh rằng nếu α là 1 nghiệm nguyên của đa thức

$$\varphi(x) = y^n + a_1y^{n-1} + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n,$$

thì $\dfrac{\alpha}{a_0}$ cũng là nghiệm của đa thức đã cho.
Giải: