

MỘT SỐ DẠNG CHUẨN TẮC CỦA CÁC HỌ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG HỖN HỢP TRONG MẶT PHẪNG

Trịnh Thị Diệp Linh*

Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Các dạng chuẩn tắc cho sự biến dạng trơn của phiếm với tham số hữu hạn chiều của phương trình đặc trưng đối với phương trình vi phân đạo hàm riêng hỗn hợp trong mặt phẳng được tìm thấy gần một điểm của tiếp tuyến của hướng đặc trưng với sự biến dạng và điểm kỳ dị không biến suy biến, không cộng hưởng.

Từ khóa: Phương trình dạng hỗn hợp, dạng chuẩn tắc, sự phân loại, sự biến dạng trơn của phiếm.

GIỚI THIỆU

Họ các đường cong tích phân của phương trình đặc trưng địa phương đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết của các phương trình đạo hàm riêng, do đó các dạng chuẩn tắc địa phương của phương trình đặc trưng dẫn đến sự thay thế trơn các tọa độ có lịch sử dài đi tới thế kỷ XIX [1]. Từ xuất phát ban đầu của bài toán cho tới cuối thế kỷ, các dạng chuẩn tắc này bao gồm các phương trình Laplace, phương trình sóng và phương trình Cibrario-Tricomi đã biết. Các phương trình đặc trưng tương ứng với các dạng chuẩn tắc trên là

$$dy^2 + dx^2 = 0, \quad dy^2 - dx^2 = 0 \quad \text{và}$$

$$dy^2 - xdx^2 = 0 \quad (1) \quad (\text{xem [2],[3],[8]}).$$

Dạng chuẩn thứ nhất và thứ hai lấy gần một điểm của miền xác định elliptic và hipebolic của phương trình

$$a(x, y)U_{xx} + 2b(x, y)U_{xy} + c(x, y)U_{yy} = F(x, y, U, U_x, U_y) \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (3)$$

các hướng đặc trưng tại một điểm là các nghiệm của phương trình (3). Giá trị của biệt thức $\Delta = b^2 - ac$, với các giá trị của biệt thức ta có thể có hai hướng đặc trưng tại một điểm, trong đó có hai hướng ảo tương ứng với giá trị biệt thức là dương, bằng không và âm. Phương trình (3) có nghiệm 0 và hai nghiệm thực $dy : dx$ tại điểm tương ứng. Dạng chuẩn Cibrario-Tricomi lấy vị trí tại một điểm điển

hình của dạng đường cong biệt thức của phương trình, dạng này được chứng minh hoàn chỉnh bởi M.Cibrario (xem [2]). Dạng này chính là chìa khóa cho các nghiên cứu sau này của các nhà toán học, do đó các dạng chuẩn tắc địa phương của họ đặc trưng các phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2 tuyến tính tổng quát trong mặt phẳng đã nhận được vào cuối thế kỷ XX trong trường hợp các dạng chuẩn tắc trơn cần tìm gần điểm của dạng đường biến đổi, tại các đường mà hướng đặc trưng là tiếp tuyến.

NỘI DUNG

Xét phương trình cấp hai trên mặt phẳng dạng (2) với x, y là các tọa độ và a, b, c là các hàm số trơn, F là hàm số nào đó.

Định nghĩa 1. Họ địa phương của các trường véc tơ trơn trong $\square_x^n$ với tham số $\tilde{\varepsilon} \in \square^m$ hữu hạn chiều, trong đó $n, m \in \square$ là phiếm tại gốc của trường véc tơ được xác định bởi phương trình

$$\dot{x} = u(x, \tilde{\varepsilon}), \quad \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (4)$$

Thành phần đầu tiên của họ là $u, u = (u, \tilde{\varepsilon})$ được gọi là sự biến dạng với tham số $\tilde{\varepsilon}$ của phiếm của trường véc tơ $u = (., O)$ tại gốc.

Hai họ địa phương của các trường véc tơ là tương đương trơn hữu hạn nếu với $r \in \square$ nào đó. Đây là các biểu diễn của các phiếm tương ứng của các họ trơn.

$\square^r$ liên hợp trong các miền xác định của chúng, miền xác định mà tồn tại phép đồng phiếm $\square^r$ của dạng $(x, \tilde{\varepsilon}) \mapsto (X(x, \tilde{\varepsilon}), E(\tilde{\varepsilon}))$,

* Tel: 0915 459454, Email: dieplinhspn@gmail.com

$(X(0,0), E(0,0)) = (0,0)$ là xác định gần gốc và các phép liên hợp các pha tương ứng [4].

Định nghĩa 2([6]). Tập hợp các số phức $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n) \in \mathbb{C}^n$ là không cộng hưởng nếu chúng không có dạng $\tilde{\lambda}_j = (m_1 \tilde{\lambda}_1 + m_2 \tilde{\lambda}_2 + \dots + m_n \tilde{\lambda}_n)$, với khoảng cách m_j không âm, $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq 2$.

Điểm kỳ dị của trường véc tơ vi phân là không cộng hưởng nếu tập hợp của các giá trị riêng của sự tuyến tính hóa của trường tại điểm đó không cộng hưởng.

Định lý 1. Sự biến dạng của phôi của trường véc tơ tron trong $\mathbb{C}^n$ tại điểm kỳ dị của nó là tương đương tron hữu hạn tới phôi tại gốc của sự biến dạng $\dot{x} = A(\tilde{\epsilon})x$ (5), với ma trận hệ số A nào đó, nếu điểm là không cộng hưởng.

Chứng minh. Trong trường hợp mặt phẳng được xác định bởi $\mathbb{C}_{\xi, \eta}^2$ phụ thuộc tham số $\tilde{\epsilon}$, thay thế tọa độ tuyến tính và nhân với hàm số tron khác 0 từ (5) với tham số $\tilde{\epsilon}$ đưa đến dạng chuẩn tắc đối với yên ngựa và điểm nút có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(\tilde{\epsilon}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ hay } v(\xi, \eta) = (\xi, \alpha(\tilde{\epsilon})\eta) \quad (6)$$

còn đối với tiêu điểm có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha(\tilde{\epsilon}) \\ \alpha(\tilde{\epsilon}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ hay } v(\xi, \eta) = (\xi - \alpha(\tilde{\epsilon})\eta, \alpha(\tilde{\epsilon})\xi + \eta) \quad (7)$$

Đây là 2 dạng khác nhau của trường với sự thay thế biến số tuyến tính và sức căng của thời gian phụ thuộc hệ số $\alpha(\tilde{\epsilon})$ đưa tới dạng tổng quát

$$v(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -k(\tilde{\epsilon}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ hay } v(\xi, \eta) = (2\eta, -2k(\tilde{\epsilon})\xi + \eta) \quad (8)$$

Dạng (8) là của trường vecto trên trục hoành $\eta = 0$ có hướng dọc khắp trục tọa độ khác O. Mặt khác, phép đổi hợp $\sigma: (\xi, \eta) \mapsto (\xi, -\eta)$ tương ứng với trường này trong mỗi điểm của

của trục hoành được xây dựng trên các trường vecto v và $\sigma_* v$ như sau

$$\left| \begin{matrix} v \\ \sigma_* v \end{matrix} \right| (\xi, \eta) = \begin{vmatrix} 2\eta & -2k(\tilde{\epsilon})\xi + \eta \\ -2\xi & 2k(\tilde{\epsilon})\xi + \eta \end{vmatrix} = 4\eta^2$$

Do đó (8) nhận được với trường hợp gấp vì đối với trường này sự thích hợp với phép đổi hợp có thể lựa chọn trong dạng chuẩn tắc. Dạng chuẩn tắc này nhận được từ (6), (7). Dạng chuẩn tắc nhận được đối với yên ngựa,

điểm nút sau đó nhân với trường $\frac{1}{\alpha(\tilde{\epsilon})+1}$ để

nhận được yên ngựa duy nhất của trường này và đi đến phương trình vi phân dạng

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{\xi}{\alpha(\tilde{\epsilon})+1} \\ \dot{\eta} = \frac{\alpha(\tilde{\epsilon})\eta}{\alpha(\tilde{\epsilon})+1} \end{cases},$$

với $\alpha(\tilde{\epsilon})+1 \neq 0$ do điểm kỳ dị không cộng hưởng.

Từ (8) sau khi đặt biến mới $\tilde{\xi} = \xi - \eta$ và

$$\tilde{\eta} = \frac{\xi - \alpha(\tilde{\epsilon})\eta}{2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]}$$

đưa đến phương trình dạng $\tilde{\xi} = 2\tilde{\eta}$. Trở lại biến cũ nhận được

$$\xi = \frac{\alpha\tilde{\xi} - 2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]\tilde{\eta}}{\alpha(\tilde{\epsilon})-1} \quad \text{và}$$

$$\eta = \frac{\tilde{\xi} - 2(\xi+1)\tilde{\eta}}{\alpha(\tilde{\epsilon})-1} \quad (9)$$

Nhưng

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \frac{\dot{\xi} - \alpha(\tilde{\epsilon})}{2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]} = \frac{\xi - \alpha^2(\tilde{\epsilon})\eta / [\alpha(\tilde{\epsilon})+1]}{2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]} \\ &= \frac{\xi - \alpha^2(\tilde{\epsilon})\eta}{2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Do đó phép thế trong vế phải của (10) bằng phép thế biến ξ, η từ (9) dẫn đến phương trình

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \frac{1}{2[\alpha(\tilde{\epsilon})+1]^2 [\alpha(\tilde{\epsilon})-1]} \\ &\quad [\alpha(\tilde{\epsilon})\tilde{\xi} - 2(\alpha(\tilde{\epsilon})+1)\tilde{\eta} - \alpha^2(\tilde{\epsilon})\xi + 2\alpha^2(\tilde{\epsilon})(\alpha(\tilde{\epsilon})+1)\tilde{\eta}] \end{aligned}$$

$$= \frac{-\alpha(\tilde{\varepsilon})\tilde{\xi}}{2[\alpha(\tilde{\varepsilon})+1]^2} + \tilde{\eta}$$

Ký hiệu $\tilde{\xi} = \xi, \tilde{\eta} = \eta$ ta nhận được $\dot{\tilde{\xi}} = 2\eta$ và $\dot{\tilde{\eta}} = -k\xi + \eta$, trong đó $k = \frac{\alpha(\tilde{\varepsilon})}{2[\alpha(\tilde{\varepsilon})+1]^2}$

Đối với trường hợp tiêu điểm, sự tính toán không giống như trường hợp yên ngựa và điểm nút ở trên. Do ý nghĩa hình học nên sự lựa chọn các tọa độ mới đơn giản hơn. Với sự thay thế của trường

$$\left(\frac{\xi - \alpha(\tilde{\varepsilon})\eta}{2}, \frac{\alpha(\tilde{\varepsilon})\xi + \eta}{2} \right) \quad (11)$$

Ta có phương trình $\frac{\xi - \alpha(\tilde{\varepsilon})\eta}{\alpha(\tilde{\varepsilon})\xi + \eta} = 1$ hay $[\alpha(\tilde{\varepsilon})+1]\eta - [1-\alpha(\tilde{\varepsilon})]\xi = 0$

Thay thế biến mới $\tilde{\xi} = \xi - \eta$ nhận được phương trình dạng $\dot{\tilde{\xi}} = \frac{\xi[1-\alpha(\tilde{\varepsilon})] - [\alpha(\tilde{\varepsilon})+1]\eta}{2}$, đặt $\frac{\xi[1-\alpha(\tilde{\varepsilon})] - [\alpha(\tilde{\varepsilon})+1]\eta}{2} = 2\tilde{\eta}$ ta có $\dot{\tilde{\xi}} = 2\tilde{\eta}$

Lấy đạo hàm với tọa độ mới $\tilde{\eta}$ ta nhận được $\dot{\tilde{\eta}} = \frac{[\xi - \alpha(\tilde{\varepsilon})\eta][1-\alpha(\tilde{\varepsilon})] - [\alpha(\tilde{\varepsilon})+1][\alpha\xi + \eta]}{8} \quad (12)$

Từ phương trình $\xi[1-\alpha(\tilde{\varepsilon})] - [1+\alpha(\tilde{\varepsilon})]\eta = 4\tilde{\eta}$ và $\xi - \eta = \tilde{\xi}$ tìm được $\xi = \frac{[1+\alpha(\tilde{\varepsilon})]\tilde{\xi}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})}$ và $\eta = \frac{[1-\alpha(\tilde{\varepsilon})]\tilde{\xi} - 4\tilde{\eta}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})}$. Thế ξ, η vào vế phải của (12) nhận được

$$\dot{\tilde{\eta}} = \frac{1}{8} \left[\begin{aligned} & (1-\alpha(\tilde{\varepsilon})) \left(\frac{(1+\alpha(\tilde{\varepsilon}))\tilde{\xi}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})} - \alpha(\tilde{\varepsilon}) \frac{(1-\alpha(\tilde{\varepsilon}))\tilde{\xi} - 4\tilde{\eta}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})} \right) \\ & - (1+\alpha(\tilde{\varepsilon})) \left(\alpha(\tilde{\varepsilon}) \frac{(1+\alpha(\tilde{\varepsilon}))\tilde{\xi} - 4\tilde{\eta}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})} + \frac{(1-\alpha(\tilde{\varepsilon}))\tilde{\xi} - 4\tilde{\eta}}{2\alpha(\tilde{\varepsilon})} \right) \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{16\alpha(\tilde{\varepsilon})} [-2\alpha(\tilde{\varepsilon})\tilde{\xi}(1+\alpha^2(\tilde{\varepsilon})) + 16\alpha(\tilde{\varepsilon})\tilde{\eta}] = -\frac{1}{8}\tilde{\xi}[\alpha^2(\tilde{\varepsilon})+1] + \tilde{\eta}$$

Vì vậy, do sự lựa chọn tọa độ của họ các trường véc tơ (8) ta nhận được dạng cần tìm.

Đối với họ v với trường tham số của phép đối hợp $\sigma: (\xi, \eta) \mapsto (\xi, -\eta)$ thích hợp, do đó họ tương ứng của phương trình ẩn trong ảnh của ánh xạ $(\xi, \eta) \mapsto (x = \xi, y = \eta^2)$ có dạng $dy^2 + \left(\frac{k(\tilde{\varepsilon})x^2}{2} - y \right) dx^2$ tương ứng với

họ của phép thế tọa độ trơn hữu hạn trong nửa mặt phẳng $y \geq 0$.

Cứ tiếp tục quá trình như vậy, thay thế tọa độ trơn hữu hạn trong nửa mặt phẳng $y < 0$ nhận được ảnh dạng tiêu chuẩn. Chẳng hạn sử dụng khai triển Taylo theo y trên trục hoành đến cấp cao hơn cấp của tọa độ trơn với số dư $R(x, y)$ và nhận được ảnh dạng hàm chẵn $R(x, -y) = R(x, y)$

Quá trình như vậy được lặp lại với họ địa phương bằng phương pháp thế tọa độ đưa đến họ phương trình ẩn (phương trình dạng hỗn hợp) của dạng cần tìm. Định lý về dạng chuẩn tắc được chứng minh.

Áp dụng định lý rút gọn (như trong [4] hoặc [5]) chúng ta có các định lý sau:

Định lý 2. Đối với cấp đã cho nào đó của lớp trơn $r \geq 1$ sự biến dạng của phôi của phương trình đặc trưng (2) tại điểm kỳ dị gấp không cộng hưởng của nó lấy dạng của phôi tại gốc của biến dạng $dy^2 + (k(\tilde{\varepsilon})x^2 - y)dx^2 = 0$ với hàm số k nào đó, sau khi nhân phương trình với hàm số $\square^r$ không triệt tiêu và lựa chọn thích hợp các tọa độ, $\square^r$ là tham số tại điểm gốc.

Điểm kỳ dị gấp không cộng hưởng của phương trình đặc trưng là điểm của tiếp tuyến của trường hướng đặc trưng với loại đường thay đổi đối với điểm kỳ dị tương xứng nâng lên trường các hướng trên bề mặt phương trình là không cộng hưởng.

Định lý 3. Đối với cấp đã cho nào đó của lớp tron $r \geq 2$ sự biến dạng của phôi của phương trình(1) tại điểm kỳ dị gấp không cộng hưởng của phương trình đặc trưng lấy dạng của phôi tại gốc của sự biến dạng

$$U_{xx} + (k(\tilde{\varepsilon})x^2 - y)U_{yy} = F(x, y, U, U_x, U_y) \quad (6),$$

với hàm số k nào đó và hàm số F mới sau khi nhân phương trình với hàm số $\square^r$ không triệt tiêu và sự lựa chọn thích hợp các tọa độ của $\square^r$ là dạng tham số tại điểm gốc.

Do phương trình (5) và các định lý 2, 3 hàm số k là như nhau. Chú ý rằng lớp tron của hệ số này có thể lựa chọn như chúng ta đã đưa ra. Nhưng sự tăng thêm của lớp này có thể dẫn đến rút gọn của khoảng cách dọc theo trục tham số do các công thức tác động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Acta Mathematica, 7, (1885), pp.1-6.
2. Cibrario, M., (1932), Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate

parziali di secondo ordine di tipo misto, Ist. Lombardo, Rend., II. Ser. 65, pp.889-906.

3. Courant, R., Gilbert, D., (1953), Methods of Mathematical Physics, I,II, Partial Differential Equations, NewYork, Interscience, 1962.

4. Davydov, A. A., (1985), The normal form of a differential equation that is not solved with respect to derivative, in the neighbourhood of its singular point, Functional Anal. Appl., 19, pp.81-89.

5. Davydov A.A., (1994), Qualitative Theory of Control Systems, Translations of Mathematical Monographs, 141, AMS in cooperation with MIR (Moscow), Providence,

6. Давыдов А.А., Л. Чинь Тхи Зиен, (2010), Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек, В Московском математическом обществе, умн, том 65, вып.5, стр 188-189.

7. Il'yashenko, Yu.S., Yakovenko, S.Yu., (1991), Smooth normal forms for local families of diffeomorphisms and vector fields, Russian Math. Surveys, 46(1), pp.3-39.

8. Tricomi, F., (1923), Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto, Memorie della R.Academia Nazionale dei Lincei, serie V, vol. XIV, fasc. VII.

SUMMARY

NORMAL FORMS OF FAMILIES OF MIXED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN THE PLANE

Trinh Thi Diep Linh*

College of Education –TNU

Normal forms for smooth deformation of germ with limited dimension parameter of characteristic equation of mixed type linear partial differential equation in the plane being linear with respect to second derivative is found near a point of tangency of characteristic direction with the type change line, when this singular point is nondegenerate and non-resonance.

Keywords: mixed type equation, normal form, classification, smooth deformation of germ

Ngày nhận bài: 01/12/2014; Ngày phản biện: 19/12/2014; Ngày duyệt đăng: 31/5/2015

Phản biện khoa học: TS. Nguyễn Thị Ngân – Trường Đại học Sư phạm - ĐHTN

* Tel: 0915 459454, Email: dieplinhspn@gmail.com