ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
==========

TRẦN THỊ HUỆ

HÀM LỒI VÀ TÍNH CHẤT CỰC TRỊ CỦA CHÚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
==========

TRẦN THỊ HUỆ

HÀM LỒI VÀ TÍNH CHẤT CỰC TRỊ CỦA CHÚNG

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2010

Mục lục

Lời nói đầu

Giải tích lồi là một bộ môn quan trọng của giải tích phi tuyến. Giải tích lồi nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi. Cấu trúc lồi là một sự mở rộng trực tiếp của cấu trúc tuyến tính. Cấu trúc lồi gặp rất nhiều trong những lĩnh vực khác nhau của toán học giải tích. Trong đó, cực trị của hàm lồi là một trong những đề tài quan trọng của giải tích lồi, lý thuyết này lại càng trở nên phong phú nhờ những tính chất của tập lồi và hàm lồi. Từ đó, người ta đưa ra những phương pháp giải quyết khác nhau cho mỗi bài toán tìm cực đại hay cực tiểu của một hàm lồi trên một tập lồi. Cực trị của hàm lồi có vai trò quan trọng trong giải tích hiện đại, đồng thời có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học, đặc biệt là trong bộ môn Toán ứng dụng như: Tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân...

Mục đích của luận văn nhằm trình bày một cách có hệ thống các kiến thức cơ bản và quan trọng nhất về cực trị của hàm lồi. Đồng thời, giới thiệu một số bài toán tối ưu lồi và các lý thuyết liên quan cho bài toán này, như là các điều kiện tối ưu, lý thuyết đối ngẫu,...

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn gồm có 3 chương.

Chương một của luận văn với tiêu đề *"Các kiến thức cơ bản về tập lồi và hàm lồi"* nhằm giới thiệu một số khái niệm cơ bản về tập lồi và hàm lồi cùng với những tính chất đặc trưng của nó. Do phần này chỉ mang tính chất bổ trợ, nên ta sẽ không chứng minh các kết quả đưa ra ở đây.

Với tiêu đề *"Tính chất cực trị của hàm lồi"*, chương hai nhằm giới thiệu những khái niệm, tính chất cơ bản, quan trọng về cực trị của hàm lồi. Chương này được chia làm hai phần. Phần đầu trình bày các khái niệm về cực đại và cực tiểu của hàm lồi. Phần tiếp theo đề cập về các tính chất cơ bản và quan trọng về cực đại, cực tiểu của hàm lồi.

Dựa trên các kết quả đã nêu ở các chương trước đó, chương ba của luận văn *"Bài toán cực trị hàm lồi"*, được dành để trình bày về ứng dụng của cực trị hàm lồi trong việc xây dựng điều kiện tối ưu cho bài toán tìm cực tiểu của một hàm lồi trên một tập lồi. Cụ thể ở đây là những điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu lồi không có ràng buộc, ràng buộc đẳng thức và ràng buộc bất đẳng thức. Đồng thời, trình bày về bài toán đối ngẫu Lagrange và điểm yên ngựa. Phần cuối của chương này trình bày về một thuật toán cơ bản để giải bài toán qui hoạch lồi. Đó là phương pháp Frank - Wolfe.

Trong quá trình hoàn thành cuốn luận văn này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành nhất đến người hướng dẫn khoa học của tôi là GS.TSKH. Lê Dũng Mưu. Thầy đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các Thầy, cô trong khoa Toán, trường ĐH Sư phạm đã nhiệt tình truyền thụ cho tôi những kiến thức quý giá, cả về phương pháp học tập cũng như các phương pháp giảng dạy, nghiên cứu trên giảng đường. Cám ơn gia đình, bạn bè đã luôn tạo điều kiện cho tôi phấn đấu, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt thời gian qua.

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng, nhưng do hạn chế về nhiều mặt nên luận văn chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Rất mong nhận được sự chỉ bảo, góp ý của Thầy cô và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Các kiến thức cơ bản về tập lồi và hàm lồi

Trong chương này nhằm giới thiệu những khái niệm cơ bản nhất về tập lồi và hàm lồi cùng những tính chất đặc trưng của nó. Do mang tính chất bổ trợ, nên các kết quả nêu dưới đây ta sẽ không chứng minh.

Các khái niệm và kiến thức cơ bản đã sử dụng được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [4] trong danh mục tài liệu tham khảo.

1.1 Tập lồi

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Đoạn thẳng nối hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$\{x|x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0,1]\}.$$

Định nghĩa 1.1.2. Một tập $C \subseteq R^n$được gọi là một tập lồi, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là, C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ví dụ 1.1.3. Trong hình học sơ cấp ta đã làm quen với các tập lồi.

- Trong $\mathbb{R}^2$, các hình tam giác, hình tròn,...là các tập lồi quen biết.

- Trong $\mathbb{R}^3$, các hình chóp, lăng trụ, hình cầu,...cũng là các tập lồi .

Định nghĩa 1.1.4. Ta nói x là tổ hợp lồi của các điểm (véc-tơ) $x^1, x^2, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j \geq 0, \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Mệnh đề 1.1.5. *Tập C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi các điểm của nó. Tức là, C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x_1, ..., x_k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in C.$$

Định nghĩa 1.1.6. Cho tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Bao lồi của tập C là giao của tất cả các tập lồi chứa C. Ký hiệu: coC.

Bao lồi của mọi tập C chính là một tập lồi nhỏ nhất chứa C.

Ví dụ 1.1.7. - Bao lồi của tập chỉ có hai điểm a, b chính là đoạn thẳng nối hai điểm a, b.

- Bao lồi của tập hợp 3 điểm không thẳng hàng là tam giác với 3 đỉnh a, b, c và phần trong của nó.

Mệnh đề 1.1.8. *Bao lồi của một tập C là tập hợp các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C.*

Định lý 1.1.9. *Tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng, phép nhân với một số, phép lấy tổ hợp tuyến tính và phép nhân tích Decastes. Tức là, nếu A và B là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, C là tập lồi trong $\mathbb{R}^m$ thì các tập sau cũng là tập lồi:*

i) $A \cap B = \{x | x \in A; x \in B\}$,

ii) $\lambda a + \beta b = \{x | x = \lambda a + \beta b, a \in A, b \in B, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$,

iii) $A \times C = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} | x = (a, c) : a \in A, c \in C\}$.

Định nghĩa 1.1.10. Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Đường thẳng đi qua hai điểm a, b là tập hợp tất cả các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$\{x|x = \lambda a + (1 - \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa 1.1.11. Một tập $M \in \mathbb{R}^n$được gọi là một tập affin (hay đa tạp affin) nếu nó chứa mọi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì của nó, nghĩa là

$$\forall x, y \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in M.$$

Nhận xét: Tập affin là một trường hợp riêng của tập lồi.

Ví dụ 1.1.12. Tập rỗng, tập gồm duy nhất một điểm $\{x_0\}$, đường thẳng, các không gian con của $\mathbb{R}^n$ là những ví dụ về tập affin.

Mệnh đề 1.1.13. *$M \neq \emptyset$ là tập affin khi và chỉ khi nó có dạng $M = L + a$ với L là một không gian con và $a \in M$. Không gian con này được xác định duy nhất.*

Không gian con trong mệnh đề nói trên được gọi là không gian con song song với M.

Định nghĩa 1.1.14. Thứ nguyên (chiều) của một tập affin M là thứ nguyên của không gian con song song với M và được kí hiệu là dimM.

Một ví dụ khác của đa tập affin là siêu phẳng, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1.15. Siêu phẳng trong không gian $\mathbb{R}$ là tập hợp các điểm có dạng

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \alpha\right\}.$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Véc tơ α được gọi là véc tơ pháp tuyến của siêu phẳng.