MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Vào đầu những năm 70, S.Kobayashi đã đưa ra lý thuyết các không gian phức hyperbolic và trở thành một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Trong những năm gần đây, lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Bài toán thác triển các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức với các kết quả quan trọng đã gắn liền với tên tuổi các nhà toán học như Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi. Từ việc khái quát hóa định lý Picard lớn để được kết quả K^3 – định lý (định lý Kiernan, Kobayashi, Kwack), và tiếp sau là định lý thác triển hội tụ Noguchi. Sau kết quả của Noguchi, từ năm 1994 đến năm 2000, J.Joseph và M.Kwack đã chứng tỏ được tất cả các kết quả trên đều có thể chứng minh và mở rộng được bằng phương pháp thuần túy tôpô. Từ đó đã đưa ra một số đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Các nghiên cứu này đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của lý thuyết các không gian phức hyperbolic và mở ra những hướng nghiên cứu mới.

Trong luận văn này, chúng tôi đặt vấn đề tìm hiểu các kết quả của J.Joseph và M.Kwack theo các hướng đã nêu. Luận văn gồm có hai chương. Chương 1, chúng tôi trình bày những vấn đề cơ bản về giải tích phức nhiều biến và giải tích hyperbolic nhằm chuẩn bị cho chương sau. Bao gồm định nghĩa một số khái niệm về đa tạp phức, không gian phức hyperbolic và tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Tiếp theo là các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi về thác triển ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày một số đặc trưng của tính chất κ, các chứng minh và tổng quát các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi.

Các kết quả trình bày trong chương 2 đã được J .Joseph và M .Kwack trình bày trong [4]. Tuy nhiên trong luận văn chúng tôi đã cố gắng trình bày một cách tương đối chi tiết các chứng minh của các định lý và trình bày các vấn đề theo cách hiểu của mình . Ngoài ra chúng tôi còn chứng minh được một số ví dụ mà J .Joseph và M .Kwack đã đưa ra nhằm làm rõ hơn các vấn đề đã được trình bày trong luận văn .

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy. Nhân dịp này em cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy , Cô đã giảng dạy cho em các kiến thức khoa học trong suốt quá trình học tập tại trường. Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc học tập của tôi. Cuối cùng tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình khoá học và hoàn thành luận văn này .

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2010

Tác giả

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Ánh xạ chỉnh hình

1.1.1 Định nghĩa

Cho X là tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $f : X \to \mathbb{C}$ là một hàm tùy ý.

(1) Hàm f được gọi là khả vi phức tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho :

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

trong đó $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{C}^n$ và $|h| = \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2 + ... + |h_n|^2}$

(2) Hàm f gọi là chỉnh hình tại $x_0 \in X$ nếu f là khả vi phức trong một lân cận nào đó của x_0 và được gọi là chỉnh hình trên X nếu f chỉnh hình tại mọi điểm thuộc X.

(3) Cho X là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ánh xạ $f : X \to \mathbb{C}^m$ có thể được biểu diễn dưới dạng $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ trong đó $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{C}$; f được gọi là chỉnh hình trên X nếu f_i chỉnh hình trên X với mọi $i = 1, 2, ..., m$.

1.1.2 Định nghĩa

Cho X là tập mở trong $\mathbb{C}^n$, hàm $f : X \to f(X) \subset \mathbb{C}^n$ là song chỉnh hình nếu f là song ánh chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.2 Đa tạp phức

1.2.1 Định nghĩa và ví dụ

1.2.1.1 Định nghĩa

Cho X là một không gian tôpô Hausdorff

(1) Cặp (U, φ) được gọi là một bản đồ địa phương của X ở đó U

là một tập mở trong *X*, $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn :

(i) $\varphi(U)$ là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

(ii) $\varphi: U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

(2) Họ $\mathrm{A} = \left\{ \left(U_i, \varphi_i \right) \right\}_{i \in I}$ các bản đồ địa phương của *X* được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas) của *X* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\left\{ U_i \right\}_{i \in I}$ là một phủ mở của *X*.

(ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ thì ánh xạ

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i \left(U_i \cap U_j \right) \to \varphi_j \left(U_i \cap U_j \right)$$

là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên *X*. Hai atlas $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ được gọi là tương đương nếu hợp $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên *X*, và *X* cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một đa tạp phức *n* chiều.

1.2.1.2 Ví dụ

(1) Giả sử *D* là một miền trong $\mathbb{C}^n$, khi đó *D* là một đa tạp phức *n* chiều với bản đồ địa phương $\left\{ \left(D, Id_D \right) \right\}$.

(2) Đa tạp xạ ảnh $P^n(\mathbb{C})$.

Xét $U_i = \left\{ \left[z_0 : z_1 : \ldots : z_n \right] \in P^n(\mathbb{C}) \middle| z_i \neq 0 \right\}$ với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Rõ ràng $\left\{ U_i \right\}_{i=1}^{n}$ là một phủ mở của $P^n(\mathbb{C})$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i : U_i \to C^n$

$$\left[z_0 : z_1 : \ldots : z_n \right] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

Ta có :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (z_0, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1} \ldots, z_n) \mapsto \left(\frac{z_k}{z_j} \right)_{\substack{k=\overline{0,n} \\ k \neq j}},$$

ở đó $z_i = 1$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $P^n(\mathbb{C})$ là một đa tạp phức *n* chiều.

1.2.2 Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

(1) Cho *M,N* là hai đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f : M \to N$ gọi là chỉnh hình trên *M* nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của *M* và bản đồ địa phương (V, ψ) của *N* sao cho $f(U) \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

là chỉnh hình.

Ta ký hiệu $H(M, N)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ đa tạp phức *M* đến đa tạp phức *N*.

(2) Cho *M,N* là hai đa tạp phức và $f : M \to N$ là một song ánh. Nếu f, f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì *f* được gọi là ánh xạ song chỉnh hình giữa *M* và *N*.

1.2.3 Định nghĩa

(1) Cho *M* là đa tạp phức, một không gian con phức đóng *X* là một tập con đóng của *M* mà về mặt địa phương nó có thể xác định là không điểm của một số hữu hạn các hàm chỉnh hình, nghĩa là với $x_0 \in X$ tồn tại một lân cận mở *V* của x_0 trong *M* và một số hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ trên *V* sao cho $X \cap V$ là tập các điểm $x \in X$ thỏa mãn :

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0.$$

(2) Cho *M* là đa tạp phức, không gian con phức đóng *A* của *M* được gọi là một divisor trên *M* nếu về mặt địa phương thì nó là không điểm của một hàm chỉnh hình, nghĩa là với mỗi $x \in A$ có lân cận *V* của *x* trong *M* sao cho $A \cap V$ là tập các không điểm của hàm *f* chỉnh hình trên *V*.

Khi $\dim M = m$ thì divisor A được gọi là có giao chuẩn tắc nếu về mặt địa phương thì :

$$M - A = (D^*)^r \times D^s, \text{ với } r + s = m,$$

trong đó D là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$.

1.3 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.3.1 Khoảng cách Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị

Giả sử $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ là đĩa đơn vị mở trong $\mathbb{C}$.

Xét ánh xạ $\rho_D : D \times D \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $\rho_D(a,b) = \ln \dfrac{1 + \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}{1 - \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}; \forall a,b \in D$.

Ta có ρ_D là một khoảng cách trên D và gọi nó là khoảng cách Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị.

1.3.2 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.3.2.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $H(D, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị D vào không gian phức X được trang bị tôpô compact mở.

Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của D và dãy các ánh xạ $f_1, f_2, ..., f_k$ trong $H(D, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i, \forall i = 1, 2, ..., k.$$

Ta gọi một dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y là tập hợp :

$$\gamma = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$$

thỏa mãn các điều kiện trên.

Ta đặt : $L_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \rho_D(0; a_i)$ và định nghĩa $d_X(x, y) = \inf L_\gamma$

trong đó infimum lấy theo tất cả các dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y . Dễ thấy d_X thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách, tức là :

$i)\ d_X(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X.$

$ii)\ d_X(x,y) = d_X(y,x), \forall x,y \in X.$

$iii)\ d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z), \forall x,y,z \in X.$

Nói cách khác d_X là một giả khoảng cách trên *X*. Giả khoảng cách d_X được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức *X*.

1.3.2.2 Tính chất

Ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau của d_X :

i) $d_D = \rho_D$ và $d_{D^n}((z_i),(w_j)) = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \rho(z_i, w_j)$ với mọi $(z_i),(w_j) \in D^n$.

ii) Nếu $f: X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức *X,Y* thì

$$d_X(p,q) \geq d_Y(f(p), f(q)), \forall p,q \in X .$$

Từ đó suy ra rằng nếu $f: X \to Y$ là song chỉnh hình thì

$$d_X(p,q) = d_Y(f(p), f(q)), \forall p,q \in X .$$

iii) Đối với một không gian phức *X* tùy ý, hàm khoảng cách d_X là liên tục trên $X \times X$.

iv) Nếu *X,Y* là các không gian phức thì với mọi $x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y$ ta có

$$\max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\} = d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) .$$

1.4 Không gian phức hyperbolic

1.4.1 Không gian phức hyperbolic

1.4.1.1 Định nghĩa

Không gian phức *X* được gọi là không gian hyperbolic nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên *X*, nghĩa là:

$$d_X(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q,\ \forall p,q\in X$$

1.4.1.2 Ví dụ

(a) D là hyperbolic vì $d_D=\rho_D$ mà ρ_D là khoảng cách trên D nên d_D cũng là khoảng cách trên D.

(b) $\mathbb{C}^n$ không là hyperbolic. Thật vậy, giả sử $d_{\mathbb{C}^n}$ là giả khoảng cách Kobayashi trên $\mathbb{C}^n$, ta sẽ chỉ ra rằng $d_{\mathbb{C}^n}=0$ và do đó $d_{\mathbb{C}^n}$ không là khoảng cách trên $\mathbb{C}^n$.

Với $x,y\in\mathbb{C}^n$ và $\forall p\in D\ (p\neq 0)$, xét ánh xạ :

$$f: D\to\mathbb{C}^n$$
$$z\mapsto x+\frac{y-x}{p}z$$

Khi đó f là ánh xạ chỉnh hình, $f(0)=x$ và $f(p)=y$. Do f làm giảm khoảng cách đối với d_D và $d_{\mathbb{C}^n}$ nên ta có:

$$d_D(0;p)\geq d_{\mathbb{C}^n}(f(0);f(p))$$
$$\Rightarrow d_{\mathbb{C}^n}(x,y)\leq \rho_D(0;p).$$

Cho p dần tới 0 ta có $d_{\mathbb{C}^n}(x,y)=0$. Vậy $\mathbb{C}^n$ không là đa tạp hyperbolic.

1.4.1.3 Tính chất

i) Nếu X,Y là không gian phức, thì $X\times Y$ là không gian hyperbolic khi và chỉ khi cả X và Y đều là các không gian hyperbolic.

ii) Giả sử X là không gian phức, Y là không gian hyperbolic và $f: X\to Y$ là ánh xạ chỉnh hình và là đơn ánh thì X cũng là không gian hyperbolic. Đặc biệt, nếu X là không gian con phức của không gian hyperbolic Y thì X cũng là hyperbolic.

Chứng minh

Với mọi $x, x' \in X, x \neq x'$ ta có :

$$d_X(x, x') \geq d_Y\left(f(x), f(x')\right).$$

Mặt khác do *f* đơn ánh nên $f(x) \neq f(x')$ và do *Y* là không gian hyperbolic nên ta có :

$$d_Y\left(f(x), f(x')\right) > 0$$

$$\Rightarrow d_X(x, x') > 0$$

$\Rightarrow X$ là không gian hyperbolic.

iii) **Định lý Barth** (xem $[8]$)

Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì d_X *sinh ra tô pô tự nhiên của X.*

1.4.1.4 Mệnh đề (Bổ đề Eastwood)

Giả sử $\pi : X \to Y$ *là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic và với mỗi điểm* $y \in Y$ *có lân cận U của y sao cho* $\pi^{-1}(U)$ *là hyperbolic thì X là hyperbolic .*

1.4.2. Không gian phức hyperbolic đầy

1.4.2.1 Định nghĩa

Không gian phức *X* được gọi là hyperbolic đầy nếu *X* là hyperbolic và mọi dãy Cauchy với khoảng cách d_X đều hội tụ.

1.4.2.2 Mệnh đề

Giả sử X là không gian hyperbolic liên thông. Khi đó X là hyperbolic đầy nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$ *và* $r > 0$ *mọi hình cầu đóng* $\overline{B}(x, r)$ *là compact.*

1.4.2.3 Mệnh đề

(a) Các đĩa và đa đĩa là hyperbolic đầy.