ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

BÙI HOÀNG NGỌC

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

BÙI HOÀNG NGỌC

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Sau thời gian nghiên cứu nghiêm túc, đến nay em đã hoàn thành bản luận văn để bảo vệ tốt nghiệp theo đúng kế hoạch của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Có được kết quả này trước hết cho em được gửi lời cảm ơn đến tập thể các thầy cô giáo đã truyền đạt những tri thức quý giá trong thời gian em học tập tại trường. Đặc biệt em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy đã hướng dẫn, giúp đỡ tận tình và đầy trách nhiệm để em hoàn thành luận văn này. Cuối cùng em xin được cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho em trong suốt thời gian em nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Học viên

Bùi Hoàng Ngọc

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân được Stampacchia [3] đưa ra nghiên cứu vào những năm đầu của thập kỷ 60 trong khi nghiên cứu bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Kể từ đó bất đẳng thức biến phân và phương pháp giải bài toán này luôn là một đề tài thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert H được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm phần tử } p^* \in C \textit{ sao cho}: \quad \langle A(p^*), q - p^* \rangle \geq 0 \quad \forall q \in C, \qquad (0.1)$$

ở đây C là một tập con lồi đóng của H, $A : C \to H$ là một ánh xạ phi tuyến. Bất đẳng thức biến phân (0.1) tương đương với bài toán điểm bất động:

$$p^* = P_C(p^* - \mu A(p^*)), \qquad (0.2)$$

trong đó P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C và $\mu > 0$ là hằng số tùy ý. Nếu ánh xạ A đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên C và hằng số $\mu > 0$ đủ nhỏ, thì ánh xạ được xác định bởi vế phải của (0.2) là ánh xạ co. Do đó, nguyên lý ánh xạ co Banach bảo đảm rằng dãy lặp Picard

$$u_{n+1} = P_C(u_n - \mu A(u_n)) \qquad (0.3)$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (0.1). Phương pháp này được gọi là phương pháp chiếu. Phương pháp chiếu không dễ dàng thực thi vì sự phức tạp của tập lồi C bất kỳ. Để khắc phục nhược điểm này, Yamada [4] đã đề xuất phương pháp lai đường dốc nhất vào năm 2001 để giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert H.

Mục đích của đề tài luận văn là trình bày cải biên của phương pháp lai đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn, bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của N ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert ($N \geq 1$) trên cơ sở bài báo [2] và [4].

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực, toán tử đơn điệu, và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert cùng phương pháp chiếu gradient giải bài toán này.

Trong chương 2 trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn và hai phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của N ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của số thực x
H	không gian Hilbert thực H
C	tập con C của H
$\|\|x\|\|$	chuẩn của véctơ x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai phần tử x và y
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của ánh xạ A
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
P_C	phép chiếu mêtric chiếu H lên C
$\mathrm{VI}(A, C)$	tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân
$x_n \rightharpoonup x$	dãy x_n hội tụ yếu đến x
$x_n \to x$	dãy x_n hội tụ mạnh đến x
I	toán tử đơn vị

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Chương này bao gồm ba mục. Mục 1.1 trình bày khái niệm và một số tính chất của không gian Hilbert thực. Mục 1.2 giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert, đồng thời trình bày phương pháp chiếu và phương pháp đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1]-[4].

1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian Hilbert thực

1.1.1. Không gian Hilbert thực

Định nghĩa 1.1 Không gian tuyến tính H xác định trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là không gian tiền Hilbert nếu trong đó xác định một hàm hai biến $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in H$;

(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$;

(iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ với mọi $x \in H$ và với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hàm $\langle\cdot,\cdot\rangle$ thỏa mãn bốn tính chất trên được gọi là tích vô hướng trên H và $\langle x, y\rangle$ là tích vô hướng của hai phần tử x và y.

Chú ý 1.1 Mọi không gian tiền Hilbert H là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn của véctơ $x \in H$ được xác định như sau:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Định nghĩa 1.2 Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1 (a) Không gian $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k,$$

trong đó $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ và $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Không gian $l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ là các dãy số trong l^2.

Định nghĩa 1.3 (i) Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu đến phần tử $x \in H$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{với mọi} \quad y \in H.$$

(ii) Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ mạnh đến $x \in H$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

Ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$ chỉ sự hội tụ yếu, $x_n \to x$ chỉ sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ đến phần tử $x \in H$.

Chú ý 1.2 (a) Trong không gian Hilbert H, hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng.