ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
==========

ĐINH DIỆU HẰNG

ĐỊNH LÝ FARKAS VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2010

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết các bài toán cực trị và có nhiều ứng dụng trong kinh tế, kỹ thuật. Để dẫn các điều kiện cần tối ưu người ta thường dùng các định lí tách của giải tích lồi hoặc các định lí luân phiên (theorems of the alternative) cho các hệ tuyến tính hoặc phi tuyến. Các định lí luân phiên nổi tiếng của J.Farkas cho các hệ tuyến tính thuần nhất hoặc không thuần nhất, và các định lí luân phiên của T.S. Motzkin, A.W. Tucker, P.Gordan, D.Gale được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu phát triển cho các hệ phi tuyến khác nhau làm công cụ để dẫn các điều kiện tối ưu.

Trong cuốn sách chuyên khảo [8], O.L. Mangasarian đã trình bày một cách hệ thống các định lí luân phiên cổ điển cho các hệ tuyến tính, trong đó có các định lí Farkas, Motzkin, Tucker, Gale.... Trong [6], V.Jeyakumar tổng quát hoá định lí luân phiên Farkas cho hệ gồm một hàm bán lồi suy rộng và một quá trình lồi, và áp dụng để dẫn các điều kiện đặc trưng cho nghiệm tối ưu của bài toán với ràng buộc là một quá trình lồi. Trong [5], B.M. Glover, V. Jeyakumar và W.Oettli đã chứng minh các định lí luân phiên Farkas suy rộng cho hệ gồm các hàm bị chặn trên bởi các hàm dưới tuyến tính, hệ gồm các hàm hiệu dưới tuyến tính, và định lí Farkas suy rộng dạng vectơ. Các kết quả đó được áp dụng để dẫn các điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc nón.

Luận văn trình bày các định lí luân phiên Farkas cho hệ thuần nhất và không thuần nhất, định lí Farkas suy rộng cho hệ gồm một hàm phi tuyến và một quá trình lồi, các định lí Farkas suy rộng cho hệ gồm các hàm bị chặn trên bởi các hàm tuyến tính và hệ gồm các hàm hiệu dưới tuyến tính, định lí Farkas dạng vectơ cùng với các áp dụng trong việc dẫn các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu với ràng buộc là một quá trình lồi, bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc nón.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương I trình bày các định lí Farkas cho hệ tuyến tính thuần nhất và không thuần nhất và các định lí định lí luân phiên có liên quan của Motzkin, Tucker, và Gale.

Chương II trình bày định lí luân phiên Farkas suy rộng của V.Jeyakumar[6] cho hệ gồm một hàm bán lồi suy rộng và một quá trình lồi. Các điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu với ràng buộc là một quá trình lồi cũng được trình bày chương này.

Chương III trình bày các kết quả của B.M. Glover, V.Jeyakumar và W. Oettli [5] bao gồm định lí luân phiên Farkas suy rộng cho hệ gồm các hàm bị chặn trên bởi các hàm dưới tuyến tính và hệ gồm các hàm hiệu dưới tuyến tính, định lí Farkas suy rộng dạng vectơ cùng với các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc nón.

Nhân dịp này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS. Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên cùng các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các bạn cùng lớp cao học Toán K16 đã luôn quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

Tác giả

Chương I

ĐỊNH LÍ FARKAS CHO HỆ TUYẾN TÍNH VÀ ÁP DỤNG

Chương I trình bày một số định lí luân phiên cho hệ tuyến tính, trong đó bao gồm các định lí Farkas thuần nhất và không thuần nhất, các định lí Motzkin, Tucker, Gale. Các định lí này được áp dụng rộng rãi trong lí thuyết tối ưu hoá. Các kết quả trong chương này được lấy trong [8]

1.1. CÁC KẾT QUẢ BỔ TRỢ

Trước hết ta đưa vào các ký hiệu về quan hệ thứ tự. Với $x, y \in R^n$,

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i ,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x \geqq y \Leftrightarrow x_i \geqq y_i ,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x \geqq y, x \neq y,$$

$$x > y \Leftrightarrow x_i > y_i ,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mệnh đề 1.1 ([8])

Cho $p \times n$ - ma trận A bất kỳ, hệ:

$$I \qquad Ax \geqq 0,$$

và

$$II \qquad A' y = 0, y \geqq 0$$

có nghiệm x và y thoả mãn

$$A_1 x + y_1 > 0,$$

trong đó *A'* là ma trận chuyển vị của *A*, A_i là hàng thứ *i* của *A*.

Định lý 1.1

Với $p \times n$ - ma trận A bất kỳ, các hệ

$$I \qquad Ax \geqq 0$$

và

$$II \qquad A'y = 0, y \geqq 0,$$

có nghiệm thoả mãn:

$$Ax + y > 0.$$

Chứng minh

Trong mênh đề 1.1, hàng A_1 đóng vai trò đặc biệt. Bằng cách đánh số lại các hàng của *A*, hàng A_i có thể đóng vai trò đặc biệt như thế. Vì vậy, theo mệnh đề 1.1, $\exists x^i \in R^n, y^i \in R^p, i = 1,2,..., p$, sao cho

$$\left\langle \begin{array}{l} Ax^{\mathrm{i}} \geqq 0 \\ A'y^i = 0, y^i \geqq 0 \\ A_i x^i + y_i^i > 0 \end{array} \right\rangle, i = 1,2,..., p. \qquad (1.1)$$

Đặt

$$x = \sum_{i=1}^{p} x^i, y = \sum_{i=1}^{p} y^i. \qquad (1.2)$$

Do (1.1), ta có

$$Ax = \sum_{i=1}^{p} Ax^i \geqq 0,$$

$$A'y = \sum_{i=1}^{p} A'y^i = 0,$$

$$y = \sum_{i=1}^{p} y^i \geqq 0,$$

và với *i = 1, 2, ..., p*, theo (1.1) nên $A_i x^i + y_i^i > 0, A_i x^k + y_i^k \geq 0$, do đó

$$A_i x + y_i = A_i x^i + y_i^i + \sum_{k=1, k \neq i}^{p} (A_i x^k + y_i^k) > 0,$$

hay

$$Ax + y > 0. \qquad \square$$

Định lý 1.2

Giả sử A và B là các $p_1 \times n$ *và* $p_2 \times n$*- ma trận với A không rỗng.*

Khi đó, các hệ

$$I \qquad Ax \geqq 0, Bx = 0,$$

và

$$II \qquad A'y_1 + B'y_2 = 0, y_1 \geqq 0,$$

có nghiệm $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}, y_1 \in R^{p_1}, y_2 \in R^{p_2}$ *thoả mãn:*

$$Ax + y_1 > 0.$$

Chứng minh

Chú ý rằng đòi hỏi *A* không rỗng chỉ để bảo đảm phát biểu của định lý là không tầm thường, nghĩa là không xảy ra trường hợp *A* không có phần tử nào.

Áp dụng định lý 1.1 với các hệ:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \geqq 0,$$

và

$$[A', B', -B'] \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \geqq 0,$$

ta nhận được x_1, y_1, z_1, z_2, thoả mãn

$$Ax + y_1 > 0,$$
$$Bx + z_1 > 0,$$
$$-Bx + z_2 > 0.$$

Đặt $y_2 = z_1 - z_2$. Khi đó ta có x, y_1, y_2 thoả mãn:

$$\begin{aligned}
&Ax \geqq 0, Bx = 0, \\
&A' y_1 + B' y_2 = 0, y_1 \geqq 0, \\
&Ax + y_1 > 0.
\end{aligned}$$

□

Hệ quả 1.2.1

Cho A, B, C và D là các $p_1 \times n, p_2 \times n, p_3 \times n$ *và* $p_4 \times n$*- ma trận, với A, B, C không rỗng. Khi đó, các hệ:*

$$I \qquad Ax \geqq 0, Bx \geqq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0,$$

và

$$II \qquad \begin{aligned}
&A' y_1 + B' y_2 + C' y_3 + D' y_4 = 0, \\
&y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0
\end{aligned}$$

có nghiệm $x \in R^n, y_1 \in R^{p_1}, y_2 \in R^{p_2}, y_3 \in R^{p_3}, y_4 \in R^{p_4}$*, thoả mãn*

$$\begin{aligned}
&Ax + y_1 > 0, \\
&Bx + y_2 > 0, \\
&Cx + y_3 > 0.
\end{aligned}$$

1.2 ĐỊNH LÍ FARKAS

Định lý 1.3 (Motzkin)

Cho các ma trận A, C và D, với A không rỗng. Khi đó, hoặc hệ:

$I \qquad Ax > 0, Cx \geqq 0, Dx = 0$ *có một nghiệm x,*

hoặc hệ:

$II \qquad \left\langle \begin{aligned} &A' y_1 + C' y_3 + D' y_4 = 0 \\ &y_1 \geq 0, y_3 \geqq 0 \end{aligned} \right\rangle$ *có một nghiệm* y_1, y_3, y_4*,*

nhưng không đồng thời xảy ra.

Chứng minh

$(I \Rightarrow \overline{II})$ (trong đó $\overline{II}$ có nghĩa là *II* không đúng):

Nếu cả *I* và *II* đúng, ta sẽ có x, y_1, y_3, y_4 thoả mãn:

$$xA'y_1 + xC'y_3 + xD'y_4 > 0.$$

Vì $xD'y_4 = 0, xC'y_3 \geqq 0,$ và $xA'y_1 > 0$. Điều đó mâu thuẫn với đẳng thức thứ nhất của *II*. Do đó, *I* và *II* không thể đồng thời xảy ra.

Vậy, $I \Rightarrow \overline{II}$.

$(\overline{I} \Rightarrow II)$ Theo hệ quả 1.2.1, ta có

$$\overline{I} \Rightarrow \left\langle \left\langle Ax \geqq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0 \right\rangle \Rightarrow \left\langle Ax \not> 0 \right\rangle \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \left\langle \begin{matrix} Ax \geqq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0 \\ A'y_1 + C'y_3 + D'y_4 = 0 \\ y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geq 0 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \left\langle y_1 \geqq 0 \right\rangle \right\rangle$$

$$\Rightarrow II.$$ □

Chứng minh tương tự định lý 1.3 ta nhận được định lý sau.

Định lý 1.4 (Tucker)

Cho các ma trận B, C và D, với B không rỗng. Khi đó:

I $\quad Bx \geq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0$ *có một nghiệm x,*

hoặc hệ:

II $\quad \left\langle \begin{matrix} B'y_2 + C'y_3 + D'y_4 = 0 \\ y_2 > 0, y_3 \geqq 0 \end{matrix} \right\rangle$ *có một nghiệm* y_2, y_3, y_4,

nhưng không đồng thời xảy ra.

Định lý 1.5

Cho các ma trận A, B, C và D, với A và B là không rỗng. Khi đó,

I $\quad \left\langle \begin{matrix} Ax \geq 0, Bx \geqq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0 \\ hoac \\ Ax \geq 0, Bx \geq 0, Cx \geq 0, Dx = 0 \end{matrix} \right\rangle$ *có một nghiệm x,* *hoặc*

II $\quad \left\langle \begin{array}{l} A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 + D'y_4 = 0 \\ y_1 > 0, y_2 \geq 0, y_3 \geqq 0 \end{array} \right\rangle$ *có một nghiệm* y_1, y_2, y_3, y_4,

nhưng không đồng thời xảy ra.

Chứng minh

$(I \Rightarrow \overline{II})$:

Nếu cả *I* và *II* đúng, ta sẽ có x, y_1, y_2, y_3, y_4 thoả mãn

$$xA'y_1 + xB'y_2 + xC'y_3 + xD'y_4 > 0,$$

bởi vì $xD'y_4 = 0, xC'y_3 \geqq 0$ hoặc $xB'y_2 \geqq 0,$ và $xA'y_1 > 0,$ hoặc $xB'y_2 > 0$ và $xA'y_1 \geqq 0.$ Nhưng điều đó mâu thuẫn với đẳng thức thứ nhất của *II*. Do đó, *I* và *II* không thể đồng thời xảy ra.

Vậy, $I \Rightarrow \overline{II}$.

$(\overline{II} \Leftrightarrow I)$:

$$\overline{II} \Rightarrow \left\langle \left\langle \begin{array}{l} A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 + D'y_4 = 0 \\ y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y_1 \not> 0 \\ \text{hoac} \\ y_2 = 0 \end{array} \right\rangle \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \left\langle \begin{array}{l} A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 + D'y_4 = 0 \\ y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0 \\ Ax \geqq 0, Bx \geqq 0, Cx \geqq 0, Dx = 0 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} Ax \geqq 0 \\ \text{hoac} \\ Bx > 0 \end{array} \right\rangle \right\rangle$$

(do hệ quả 1.2.1).

$\Rightarrow I.$ □

Chú ý rằng nếu *A* hoặc *B* rỗng, thì ta trở lại với định lý 1.4 hoặc định lý 1.3.

Định lý 1.6 (Farkas)