ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
==========

ĐỖ MẠNH HÙNG

ĐỘ ĐO JENSEN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS – TSKH NGUYỄN VĂN KHUÊ

Thái Nguyên - 2010

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Độ đo Jensen là độ đo phản ánh một số tính chất cơ bản của hàm điều hoà dưới, đặc biệt của hàm đa điều hoà dưới. Vì vậy, độ đo này đóng vai trò quan trọng trong giải tích phức và lý thuyết đa thế vị.

Luận văn gồm hai chương. Chương I trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích phức và lý thuyết đa thế vị. Chương II trình bày chi tiết và có phần nào phát triển công trình " Jensen measure" gần đây của Thomas J.Ransford (2002) về độ đo Jensen.

Để hoàn thành được luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn GS - TSKH Nguyễn Văn Khuê người thầy đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo trường Đại học sư phạm Hà Nội và các thầy cô giáo viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn trường THPT Hiệp Hoà số 4 tỉnh Bắc Giang, gia đình và bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình tác giả học tập.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2009.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 1.

CÁC KIẾN THỨC VỀ LÝ THUYẾT THẾ VỊ

1.1 Hàm điều hoà dưới

Trong mục này, $d\sigma(x)$ luôn kí hiệu là diện tích mặt cầu $\partial B(x_0,r)$. Đặt

$$L(u,a,r)=\frac{1}{c_d r^{d-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(z)d\sigma(z)$$

$$A(u,a,r)=\frac{1}{b_d r^{d}}\int_{B(x,r)} u(z)d\lambda(z)$$

gọi là các trung bình tích phân của u trên mặt cầu $\partial B(x_0,r)$ và trên hình cầu $B(x_0,r)$.Trong đó, $C_d=\sigma(\partial B(0,1))$ là diện tích mặt cầu đơn vị và $b_d=\lambda(B(0,1))$ là thể tích hình cầu đơn vị trong $\mathbf{R}^d$.

1.1.1 Định Nghĩa

Một hàm u *xác định trên tập con mở* Ω *của* $\mathbf{R}^d$ *vào* $\left[-\infty,\infty\right)$ *được gọi là điều hoà dưới trên* Ω *nếu các điều kiện sau thoả mãn:*

(i) u *là hàm nửa liên tục trên.*

(ii) Nếu x *là một điểm tuỳ ý trong* Ω *thì với* $r>0$ *tuỳ ý, đủ nhỏ ta có*

$$u(x)\le L(u,a,r).$$

Một ví dụ điển hình trong trường hợp $d=2$ là hàm $\log\left|f(z)\right|$ với f là hàm chỉnh hình bất kì trong $\mathbf{R}^2$ xem như mặt phẳng phức. Ta xét một ví dụ về hàm điều hoà dưới khác trong trường hợp $d>2$ là hàm

$$K(x)=-\left\|x\right\|^{2-d}$$

Hàm này điều hoà trong $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ và bằng $-\infty$ tại 0. Ta kí hiệu tập tất cả các hàm điều hoà dưới trên Ω là $SH(\Omega)$. Chú ý rằng, với định nghĩa này, hàm đồng nhất $-\infty$ trên Ω cũng là hàm điều hoà dưới. Tính chất nổi bật của hàm điều hoà dưới là nguyên lý cực đại, nêu trong định lý dưới đây.

1.1.2. Định lý (Nguyên lý mođun cực đại)

Giả sử Ω *là một miền bị chặn trong* $\mathbf{R}^d$ *và* $u \in SH(\Omega)$. *Khi đó*

(i) Nếu u *đạt giá trị cực trên* Ω *thì* u *là hàm hằng.*

(ii) Nếu $\lim\sup_{x\to\xi} \le 0$ *với mọi điểm* ξ *trên* $\partial\Omega$ *thì* $u \le 0$ *trên* Ω.

Chứng minh.

(i) Giả sử u đạt giá trị cực đại M trong Ω. Đặt

$$A = \{x \in \Omega :\ u(x) < M\}, \qquad \mathrm{B} = \{x \in \Omega :\ u(x) = M\}$$

Khi đó, A, B là hai tập rời nhau và $\Omega = A \cup B$. Do u là nửa liên tục trên nên A là tập mở. Sử dụng bất đẳng thức dưới trung bình đối với hàm điều hoà dưới ta có B là tập mở. Do Ω liên thông, $B \neq \varnothing$ nên $B = \Omega$. Vậy u là hàm hằng.

(ii) Thác triển u tới biên của Ω bằng cách đặt $u(\xi) = \limsup_{x\to\xi} u(x)$ với mọi $\xi \in \partial\Omega$. Khi đó, u là nửa liên tục trên trên tập $\overline{\Omega}$ compact nên nó đạt cực đại tại một điểm $y \in \overline{\Omega}$. Nếu $y \in \partial\Omega$ thì theo giả thiết $u(y) \le 0$, suy ra $u \le 0$.

Nếu $y \in \Omega$ thì do (i), ta có u là hàm hằng trên Ω. Khi đó hiển nhiên $u \le 0$.

1.1.3. Định lý (Dán các hàm điều hoà dưới)

Cho Ω *là một tập con mở của* $\mathbf{R}^d$, *và* ω *là tập con thực sự, mở trong* Ω. *Nếu* $u \in SH(\Omega)$, $v \in SH(\omega)$ *và* $\limsup_{x\to y} v(x) \le u(y)$ *với mọi* $y \in \partial\omega \cap \Omega$, *khi đó nếu đặt*

$$\omega(y) = \begin{cases} \max\{u(y), v(y)\} & \text{nếu } y \in \omega \\ u(y) & \text{nếu } y \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

thì $\omega \in SH(\Omega)$.

Chứng minh.

Bởi điều kiện $\limsup_{x\to y} v(x) \le u(y)$ ta có ω là hàm nửa liên tục trên trên Ω. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức dưới trung bình địa phương. Tức là với mỗi $x \in \Omega$ tồn tại $R > 0$ sao cho với mọi $0 < r < R$ ta có $\omega(x) \le L(\omega; x, r)$. Điều này là hiển nhiên nếu $x \in \Omega \square(\partial\omega)$.

Trong trường hợp $x \in \partial\omega$ tồn tại R sao cho $0 < r < R$ ta có $u(x) \le L(u, x, r)$. Khi đó

$$\omega(x) = u(x) \le L(u, x, r) \le L(\omega, x, r)$$

với mọi $0 < r < R$. vậy $\omega \in SH(\Omega)$.

Cho Ω là tập con mở của $\mathbf{R}^d$, bài toán Dirichlet cổ điển trên Ω là: Cho trước hàm $f \in C(\partial\Omega)$, tìm hàm điều hoà h trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$ sao cho $h = f$ trên $\partial\Omega$. Trường hợp Ω là hình cầu bài toán đã được giải quyết trọn vẹn bởi công thức tích phân poisson. Đặt $P(x; y) = \dfrac{\|x\|^2 - \|y\|^2}{\|x - y\|^d}$ với mỗi $x, y \in \mathbf{R}^d$ sao cho $x \ne y$. Hàm $(x, y) \mapsto P(x, y)/(c_d\|x\|)$ gọi là nhân posson trong $\mathbf{R}^d$. Ta có định lý sau đây.

1.1.4 Định lý

Cho $f \in C(\partial B(a, r))$ với $a \in \mathbf{R}^d$ và $r > 0$. Khi đó nếu đặt

$$v(y) = \begin{cases} f(y) & \text{nếu } y \in \partial B(a, r) \\ r^{d-2} L(P(x-a, y-a) f(x); a, r) & \text{nếu } y \in B(a, r) \end{cases}$$

thì v là nghiệm duy nhất của bài toán Dirichlet trên $B(a, r)$ với hàm biên f.

Với các kí hiệu như trên thì

$$PI(f, B(a, r)) = r^{d-2} L(P(x-a, y-a) f(x); a, r) \qquad (1.1)$$

Được gọi là tích phân poisson của f trên B.

1.1.5 Định lý (Poisson Modification).

Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbf{R}^d$ và B là một hình cầu trong Ω. Cho u là một hàm điều hoà dưới trên Ω không đồng nhất bằng - ¥ . Đặt

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} PI(u,B)(y) & \text{nếu } y \in B \\ u(y) & \text{nếu } y \in \Omega \setminus B \end{cases}$$

Khi đó $\bar{u}$ *điều hoà dưới trên* Ω *và điều hoà trong* B. *Hơn nữa* $\bar{u} \geq u$ *trên* Ω.

1.2. Hàm Green

Trong phần này là một số kết quả cơ bản của hàm Green, một đối tượng quan trọng trong lý thuyết thế vị.

1.2.1 Định nghĩa

Giả sử Ω *là một tập con mở của* $\mathbf{R}^d$. *Một hàm Green (nếu tồn tại) cho tập mở* Ω *là một hàm* $G_\Omega : \Omega \times \Omega \to [-\infty, \infty)$ *với các tính chất sau:*

(i) $G_\Omega(x,\cdot) = u_x + h_x$ *ở đó với mỗi* $x \in \Omega$, h_x *là hàm điều hoà trong* Ω.

(ii) $G_\Omega \leq 0$.

(iii) Nếu với $x \in \Omega$, v_x *là một hàm điều hòa dưới* ≤ 0 *và là tổng của* u_x *và một hàm điều hoà dưới, thì* $v_x \leq G_\Omega(x,\cdot)$.

Nói cách khác, với mỗi $x \in \Omega$, $G_\Omega(x,\cdot)$ là cực đại trong lớp các hàm ≤ 0 mà có thể viết dưới dạng $u_x + \omega_x$ ở đó $\omega_x \in SH(\Omega)$.

1.2.2. Định lý

Hàm Green G_Ω *của tập mở* Ω *nếu tồn tại là duy nhất.*

Chứng minh.

Giả sử G'_Ω là một hàm Green thứ hai của Ω. Bởi điều kiện (iii) trong định nghĩa, $G'_\Omega \geq G_\Omega$ và $G_\Omega \geq G'_\Omega$. Do đó $G_\Omega = G'_\Omega$.

Chúng ta có hai định lý sau nói về sự tồn tại của hàm Green.

1.2.3 Định lý

Giả sử $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ *là một tập con mở với* $d \geq 3$. *Khi đó* Ω *là hàm Green.*

1.2.4 Định lý (Myrberg, 1933).

Nếu Ω *là một tập con mở của* $\mathbf{R}^2$*, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{R}^2 \setminus \Omega$ *không là tập cực.*

(ii) Tồn tại hàm điều hòa dưới âm xác định trên Ω.

(iii) Ω *có hàm Green.*

Chứng minh.

(Xem định lí 8.33, [14])

1.3 Tập cực

Chúng ta sẽ nghiên cứu tập những điểm mà ở đó một hàm điều hoà dưới lấy giá trị $-\infty$. Chúng có vai trò như những tập có độ đo không trong lý thuyết độ đo.

1.3.1 Định nghĩa

Một tập hợp $Z \subset \mathbf{R}^d$ *được gọi là một tập cực nếu có một tập mở* $U \supset Z$ *và một hàm* $u \in SH(U)$ *sao cho* $u = -\infty$ *trên* Z *và* $u \not\equiv -\infty$ *trên mọi thành phần liên thông của* U.

1.3.2 Định lý

Giả sử u *là một hàm điều hoà dưới trên tập mở* Ω. *Khi đó tập*

$$E = \{ y \in \Omega : \ u(y) = -\infty \}$$

là một tập G_δ. *Nếu* Z *là một tập cực thì nó là tập con của một tập* G_δ *cực. Hơn nữa, mọi tập con của một tập cực là một tập cực.*

Chứng minh

Vì u nửa liên tục trên nên với mọi j tập hợp $\{ x \in \Omega : u(x) < -j \}$ là tập mở. Mặt khác $E = \cap_j \{ x \in \Omega : \ u(x) < -j \}$. Do đó E là G_δ - cực.

Khẳng định thứ hai của định lý suy ra từ kết luận trên và định nghĩa.

Bởi tính khả tích địa phương của hàm điều hoà dưới ta có định lý sau.

1.3.3 Định lý

Nếu E *là một tập cực thì giao của nó với mỗi mặt cầu có diện tích mặt không.*

Định lý dưới đây cho thấy, hàm xác định của một tập cực có thể chọn là hàm điều hoà dưới trên toàn không gian.

1.3.4 Định lý

Giả sử $Z \subset \mathbf{R}^d$ *là một tập cực. Khi đó tồn tại hàm điều hoà dưới trên* $\mathbf{R}^d$ *sao cho* $u = -\infty$ *trên* Z.

Chứng minh

(Xem định lý 7.3, 7.4, [14])

1.3.5 Định lý

Nếu $\{Z_j\}$ *dãy các tập cực thì* $\cup_j Z_j$ *là tập cực.*

Chứng minh

Giả sử $u_j \in SH\,(\mathbf{R}^d)$ sao cho $u_j = -\infty$ trên Z_j. Vì u_j hữu hạn hầu khắp nơi nên tồn tại $y \in B(0,1)$ sao cho $u_j(y) > -\infty$ với mọi j. Xem u_j chỉ là hàm trên $B(0,j)$. Vì u_j là hàm nửa liên tục trên nên $\sup_{\|x\|\le j} u_j(x)$ là hữu hạn. Vậy ta có thể chọn dãy các số dương b_j sao cho chuỗi dưới đây hội tụ.

$$\sum_j b_j \left[u_j(y) - \sup_{\|x\|\le j} u_j(x) \right]$$

Đặt
$$u = \sum_j b_j \left[u_j(y) - \sup_{\|x\|\le j} u_j(x) \right]$$

Xét một hình cầu cố định $B(0,k)$. Mọi số hạng trong chuỗi trừ ra $k-1$ số hạng đầu là hàm điều hoà dưới không dương. Do vậy u điều hoà dưới trên mỗi hình cầu $B(0,k)$ và do đó điều hoà dưới trên $\mathbf{R}^d$. Rõ ràng $u = -\infty$ trên $\cup_j Z_j$.

1.4 Dung lượng

Phần này nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản của lí thuyết dung lượng. Chi tiết về vấn đề này, (xem [14]).

1.4.1 Định nghĩa

Giả sử Ω *là một không gian tôpô. Một dung lượng là một hàm tập hợp* $\phi : E \mapsto \phi(E)$ *được xác định trên mọi tập con* $E \subset \Omega$ *với giá trị trong* $[0,\infty]$*, thoả mãn các tiên đề dưới đây*

(i) Nếu $E \subset F \subset \Omega$*, thì* $\phi(E) \le \phi(F)$ *(đơn điệu tăng).*

(ii) Nếu $\{E_j\}$ *là một dãy tăng các tập con của* Ω *thì*

$$\phi(\cup_j E_j) = \lim_{j\to\infty} \phi(E_j)$$

(iii) Nếu $\{K_j\}$ *là dãy giảm các tập compact của* Ω *thì*

$$\phi(\cap_j K_j) = \lim_{j\to\infty} \phi(K_j)$$

Dung lượng ϕ *được gọi là dưới cộng tính nếu* $\phi(\emptyset) = 0$ *và* ϕ *thoả mãn*

(iv) Nếu $E_1, E_2, ...$*là các tập con của* Ω *thì*

$$\phi(\cup_j E_j) \le \sum_j \phi(E_j).$$

1.4.2 Định nghĩa

Một tiền dung lượng là một hàm tập hợp $c : E \mapsto c(E)$ *được xác định trên mọi tập con Borel của* Ω *với giá trị trong* $[0,\infty]$*, thoả mãn các tiên đề 1.4.1(i),(ii). Tiền dung lượng* c *gọi là chính quy trong nếu mọi tập con Borel* E *của* Ω *thoả mãn:*

$$c(E) = \sup\{c(K) : K \subset E,\ K \text{ compact}\} \qquad (1.2)$$

Tương tự, c *gọi là chính quy ngoài nếu mọi tập con Borel* E *của* Ω *thoả mãn:*

$$c(E) = \inf\{c(G) : G \supset E,\ G \text{ mở}\} \qquad (1.3)$$

Khi c *là một tiền dung lượng và* $E \subset \Omega$ *là một tập bất kì, dung lượng trong* $c_*(E)$ *và dung lượng ngoài* $c^*(E)$ *được định nghĩa như sau*