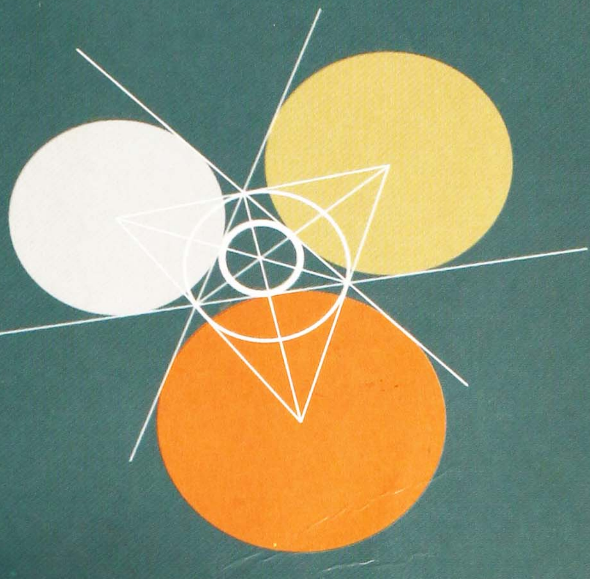
3

PHAN KHẮC ĐỒ
sưu tầm và biên soạn

TUYỂN TẬP
25 BỘ ĐỀ ÔN THI
MÔN TOÁN

Luyện thi *TỐT NGHIỆP PTTH
*CAO ĐẲNG
*ĐẠI HỌC



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP TP. HỒ CHÍ MINH

PHAN KHẮC ĐỒ
(Sưu tầm và biên soạn)

TUYỂN TẬP 25 BỘ ĐỀ ÔN THI MÔN TOÁN

Luyện thi: * Tốt nghiệp THPT
* Cao đẳng
* Đại học

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ 1

Câu I: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m+1)x + 5m - 1$ (Cm)

① Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 1$.

② Tìm m để đường thẳng qua các cực điểm của (Cm) cũng qua gốc toạ độ O.

Câu II:

① Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x + 2^y \le 1 \\ x + y \ge 2 \end{cases}$

② Giải phương trình $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$.

③ Chứng minh với a, b, c dương và $abc = 1$

Ta có: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

Câu III:

① Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$ $(a > 0)$, từ đó tính tích phân:

$$I = \int_0^{2a} \sqrt{x^2 = a^2}\,dx$$

② Tìm số hạng đứng giữa của khai thức: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{10}$

Câu IV:

① Cho 2 đường thẳng (d_1): $2x - y + 1 = 0$ và

(d_2): $x + 2y - 7 = 0$ cắt nhau tại A. Lập phương trình đường thẳng (d) qua gốc toạ độ O cắt (d_1), (d_2) tại B, C sao cho ABC cân đỉnh A.

② Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$(D): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-6} \text{ và } (D'): \begin{cases} 2x + 4y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

Lập phương trình đường thẳng (Δ) vuông góc chung của (D) và (D').

③ Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng các mặt bên có góc ở đáy bằng α. Tính đường cao của hình chóp.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN ĐỀ 1

Câu I: $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m+1)x + 5m - 1$ (Cm)

① Nếu $m = 1$ $y = x^3 + 3x + 4$ (C)

+ Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Chiều biến thiên:

* Tăng giảm cực trị: $y' = (x^3 - 3x + 4)' = 3x^2 + 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $y' > 0$ hàm số luôn luôn đồng biến nên không có cực trị.

* Lồi lõm – Điểm uốn

$y'' = (3x^2 + 3)' = 6x$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Toạ độ điểm uốn $x = 0 \Rightarrow y = 4$

* Điểm đặc biệt

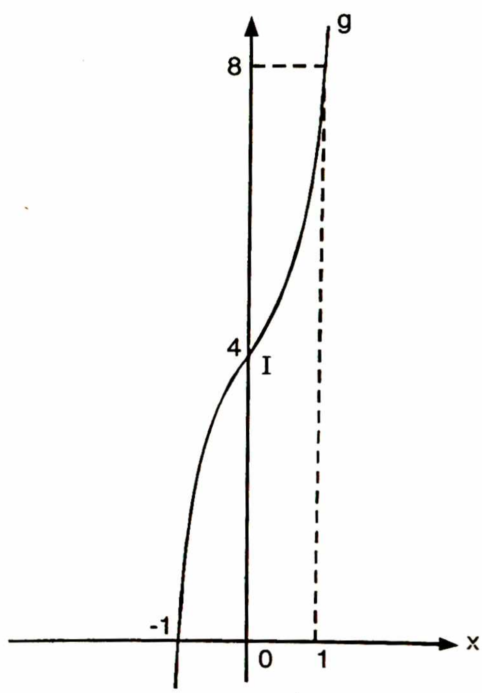
$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

* **Bảng biến thiên**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		–	0	+	
y'		+	3	+	
y	$-\infty$	↗	4	↗	$+\infty$



Kết luận:

Đồ thị là 1 đường cong liên tục nhận điểm uốn I(0,4) làm tâm đối xứng.

+ Cắt Ox tại điểm $(-1,0)$

+ Lồi trong khoảng $(-\infty, 0)$

Lõm trong khoảng $(0, +\infty)$

② Tìm m

Ta có: $y' = (x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m+1)x + 5m - 1)'$

$y' = 3x^2 - 6(m-1)x + 2m + 1$

Để hàm số có 2 cực điểm $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6(m-1)x + 2m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = 3(3m^2 - 8m + 2) > 0$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$ hay $m > \dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$ (a)

Lấy y(x) chia cho y'(x) ta có kết quả:

$$y(x) = \frac{1}{3}y'(x)(x - m + 1) + \frac{1}{3}[(-6m^2 + 14m - 5)x + 2m^2 + 3m - 2]$$

Toạ độ các cực điểm nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m+1)x + 5m - 1 \\ y'(x) = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng qua 2 cực điểm là:

$$y = \frac{1}{3}[(-6m^2 + 14m - 5)x + 2m^2 + 13m - 2]$$

Để đường thẳng này qua gốc toạ độ O

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 13m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-13 \pm \sqrt{185}}{6}$$

<u>Câu II</u>:

① Giải hệ $\begin{cases} 2^x + 2^y \le 1 & (1) \\ x + y \ge -2 & (2) \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases} \Rightarrow uv = 2^{x+y}$ (3)

Từ (2) và (3) $uv = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$ (4)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $u + v \ge 2\sqrt{uv}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow u + v \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1$ (6)

Từ (1) và (6) $\Rightarrow \begin{cases} u + v \geq 1 \\ u + v \leq 1 \end{cases}$

Vậy u + v = 1 $\Leftrightarrow u = v = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2} \\ 2^y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

② Giải phương trình:

$$4\sin^3x + 3\cos^3x - 3\sin x - \sin^2x\cos = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \sin x = \pm 1$

Phương trình (1) không nghiệm đúng

+ Với $\cos x \neq 0$ chia 2 vế của (1) cho $\cos^3x$ và đặt $t = \operatorname{tg}x$

(1) $\Leftrightarrow t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \pm\sqrt{3}$$

$$+\ t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$+\ t = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

③ a, b, c dương thỏa abc = 1

Chứng minh $\dfrac{a^2}{b + c} + \dfrac{b^2}{c + a} + \dfrac{c^2}{a + b} \geq \dfrac{3}{2}$

Đặt $\begin{cases} A = b + c \\ B = c + a \\ C = a + b \end{cases} \Rightarrow A + B + C = 2(a + b + c)$

Đặt $p = a + b + c \Rightarrow \begin{cases} a = p - A \\ b = p - B \\ c = p - C \end{cases}$

Đặt $M = \dfrac{a^2}{b + c} + \dfrac{b^2}{c + a} + \dfrac{c^2}{a + b} = \dfrac{(p - A)^2}{A} + \dfrac{(p - B)^2}{B} + \dfrac{(p - C)^2}{C}$

$$= \frac{p^2 - 2pA + A^2}{A} + \frac{p^2 - 2pB + B^2}{B} + \frac{p^2 - 2pC + C^2}{C}$$

$$= p^2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) + A + B + C - 6p$$

$$= \frac{p}{2}(A + B + C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) + 2p - 6p$$

$$= \frac{p}{2}(A + B + C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) - 4p \ (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm ta có:

$$\begin{cases} A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC} \\ \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}} \end{cases} \Rightarrow (A + B + C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) \geq 9p \ (2)$$

(1) và (2) $\Rightarrow n \geq \frac{9p}{2} - 4p = \frac{p}{2}$

hay $n \geq \frac{1}{2}(a + b + c)$ mặt khác $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$

Vậy $n \geq \frac{3}{2}$ hay

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \ (\text{đpcm})$$

Câu III:

① a) Tính đạo hàm của $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$

$$y' = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)'}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Suy ra $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$ là 1 nguyên hàm của $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

b) Tính $I = \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2}dx$ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - a^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ v = x \end{cases}$

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2}\Big]_a^{2a} - \int_a^{2a} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= 2a^2\sqrt{3} - \int_a^{2a} \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx$$

$$= 2a^2\sqrt{3} - \int_a^{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int_a^{2a}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= 2a^2\sqrt{3} - I - a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\Big]_a^{2a}$$

$$\Rightarrow 2I = 2a^2\sqrt{3} - a^2\left[\ln\left|2a - a\sqrt{3}\right| - \ln a\right]$$

$$= 2a^2\sqrt{3} - a^2\ln(2 + \sqrt{3}) = a^2(2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}))$$

Suy ra $I = \frac{1}{2}a^2[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]$

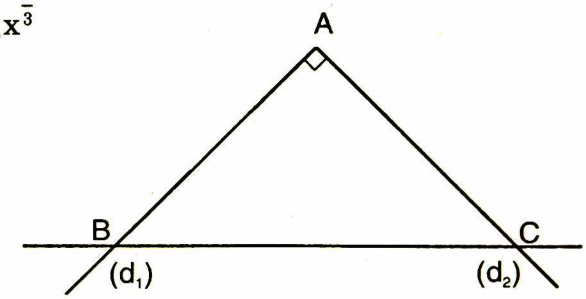
② Tìm số hạng chính giữa của khai thức: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{10}$

Số hạng chính giữa của khai thức là:

$$T_6 = C_{10}^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$$

$$= C_{10}^5 x^{-1}.x^{\frac{10}{3}} = C_{10}^5 x^{\frac{7}{3}}$$

$$T_6 = 252x^2\sqrt[3]{x}$$



__Câu IV__:

(d_1): $2x - y + 1 = 0$

(d_2): $x + 2y - 7 = 0$

Ta thấy pháp vectơ của (d_1) là $\overrightarrow{n_1} = (2, -1)$

và pháp vectơ của (d_2) là $\overrightarrow{n_2} = (1, 2)$

Ta thấy $\overrightarrow{n_1} - \overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Phương trình thẳng (d): $ax + by = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Vì ΔABC vuông cân $\widehat{B} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{d, d_1}) = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2|2a - b| = \sqrt{10(a^2 + b^2)}$$

$\Rightarrow 3a^2 + 8ab - 3a^2 = 0$ (1)

Cho $b = 1 \Rightarrow 3a^2 + 8a - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3 \\ a = +\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình của (d): $3x - y = 0$

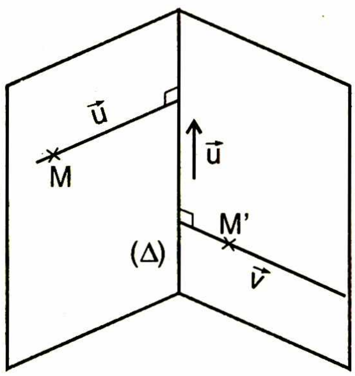
$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình của (d'): $3x + y = 0$

② (D): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-6}$ (D'): $\begin{cases} 2x + 4y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$

(D) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 3, -6)$ và qua M(1, –2, 1)

Vectơ chỉ phương của (D')

$\vec{v} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]$ với $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (2, 4, -4) \\ \overrightarrow{n_2} = (4, -1, -5) \end{cases}$



$\Rightarrow \vec{v} = (-24, -6, -18)$ ta chọn $\vec{v} = (4, 1, 3)$

Lấy M' ∈ (D) $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2 = 0 \\ 4x - y + 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ M'(–1, 0, 0)

Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc chung của (D') & (D') thì vectơ chỉ phương của là $\vec{w} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = (15, -30, -10)$

Chọn $\vec{w} = (3, -6, -2)$

Ta thấy $\Delta = \alpha \cap \beta$ với $\begin{cases} \alpha \equiv (\Delta, D) \\ \beta \equiv (\Delta, D') \end{cases}$

Pháp vectơ của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{u}, \vec{w}\right] = (30, 22, 21)$

Vậy phương trình của mp (α) là:

$$30(x-1)+22(y+2)+21(z-1)=0$$

hay $30x+22y+21z-9=0$

* Pháp vectơ của (β): $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\vec{v},\vec{w}\right]=(24, 1, -27)$

Phương trình của mp (β) là:

$$24(x+1)+1(y-0)-27(z-0)=0$$

hay $24x+y-27z+24=0$

Vậy phương trình của đường thẳng (Δ) là:

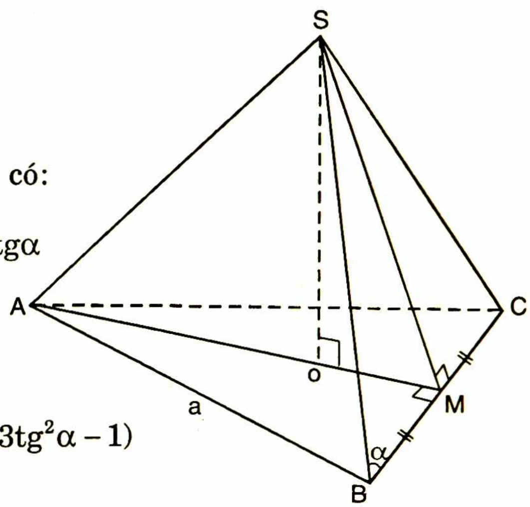
$$\begin{cases}30x+22y+21z-9=0\\24x+y-27z+24=0\end{cases}$$

③ ABC là hình chóp tam giác đều,

hạ $SO\perp(ABC)\Rightarrow O$ là tâm của vòng (ABC)

Gọi M là trung điểm của BC.

$$\Rightarrow\begin{cases}OM=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\\BM=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$



Trong tam giác vuông SBM ta có:

$$SM=BM.\,tg\alpha=\frac{a}{2}tg\alpha$$

Do đó ta có:

$$SO^2=SM^2-OM^2$$

$$=\frac{a^2}{4}tg^2\alpha-\frac{3a^2}{36}=\frac{3a^2}{36}(3tg^2\alpha-1)$$

$$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3tg^2\alpha-1}$$