

Hệ phương trình khép kín cho chuyển động rối và các phản ứng cháy

TS NGUYỄN MẠNH THƯỜNG
THS NGUYỄN VĂN HẢI

Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Các quá trình cháy diễn ra trong buồng đốt nôi hơi và động cơ đốt trong đều kèm chuyển động rối, xoáy lốc mạnh. Đã có các công trình đưa ra mô hình tính quá trình cháy nêu trên ở Việt Nam [5], nhưng hoặc là chưa tổng quát, hoặc trong đó chưa trình bày rõ bản chất các đại lượng rối và điều kiện biên cho các đại lượng này. Bài báo trình bày mô hình tính tương đối đầy đủ cho quá trình diễn ra trong buồng đốt và bản chất vật lý một số đại lượng nêu trên.

CLOSED SYSTEM OF EQUATIONS FOR TURBULENT FLOWS AND BURNING REACTIONS

Summary

Burning reactions in boilers or diesel combustion chambers are always associated with strong turbulence and vortex. Some works have been done on modeling these processes in Vietnam [5], but they are not for general cases, either they did not show clearly physical properties of turbulence quantities and boundary conditions for determining these quantities. The aim of this article is to introduce rather an universal computational model for processes in combustion chambers and physical properties of those quantities.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, vấn đề môi trường và cụ thể đối với kỹ thuật nhiệt thì giảm thải độc tố trong khí xả và bảo đảm hiệu suất cao của thiết bị là những vấn đề đang được quan tâm. Mô hình tính toán các quá trình trong động cơ đốt trong đối hồi phải chính xác hơn và ít phụ thuộc vào các số liệu thực nghiệm hơn. Muốn tính toán được quá trình cháy, điều kiện và tốc độ sản sinh các thành phần độc hại (NO_x , SO_x , CO ...) thì phải xác định được các trường nhiệt độ, tốc độ dòng, nồng độ các chất... ở trong buồng đốt.

Đặc điểm của các quá trình xảy ra trong buồng đốt (đặc biệt là động cơ đốt trong kiểu piston) là kèm theo xoáy lốc, rối mạnh và môi chất là khí chịu nên nên phải sử dụng các phương trình động lực học cho dòng rối. Đối với các dòng rối, do có thêm các ẩn số nên cần phải bổ sung thêm số phương trình hoặc các hệ số để khép kín hệ. Vấn đề đặt ra là lựa chọn các hệ số hoặc phương trình khép kín thế nào cho phù hợp trong từng bài toán cụ thể? Bài viết giới thiệu mô hình tính toán chuyển động rối; bản chất và sự phụ thuộc của các phương trình và hệ số khép kín; các phương trình truyền chất và truyền năng lượng phục vụ cho việc xây dựng mô hình tính toán quá trình cháy.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

1. Phương trình chuyển động rối

Như đã biết trong chuyển động rối, các đại lượng như vận tốc, áp suất hay mật độ đều là những đại lượng thay đổi mạch động quanh giá trị trung bình. Để xét tới những đại lượng mạch động nào đó, ví dụ vận tốc, ta kí hiệu:

$$\omega = \bar{\omega} + \omega' \quad (a)$$

Trong đó các kí tự chữ hoa để chỉ giá trị trung bình, và các kí hiệu có dấu (') là các đại lượng mạch động (rối), thay đổi ngẫu nhiên và có giá trị trung bình theo thời gian bằng không. Như vậy, giá trị trung bình theo thời gian của một đại lượng rối:

NGHIÊN CỨU - TRAO ĐỔI

$$\overline{w'} = 0$$

$$\overline{\omega} = \overline{W'} + \overline{w'} = \overline{W'}$$

(b)

Giá trị trung bình của tích các đại lượng rối được tính theo quy tắc:

$$\overline{\alpha\beta} = (\overline{A + \alpha'})(\overline{B + \beta'}) = \overline{AB} + \overline{\alpha'\beta'}$$

$$\overline{\alpha\beta\xi} = (\overline{A + \alpha'})(\overline{B + \beta'})(\overline{E + \xi'}) = \overline{ABE} + \overline{E\alpha'\beta'} + \overline{B\alpha'\xi'} + \overline{A\xi'\beta'} + \overline{\alpha'\beta'\xi'} \quad (c)$$

Trong đó, nếu $\overline{\alpha'\beta'} \neq 0$ thì hai đại lượng trên tương quan với nhau, nếu $\overline{\alpha'\beta'} = 0$ thì chúng là không tương quan.

Thay các đại lượng biến đổi mạch động (dạng a) vào phương trình Navier Stokes cho chất lỏng không nén được và không xét đến lực khối, sau đó lấy giá trị trung bình theo các quy tắc (b) và (c) thu được phương trình:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{W'_i}}{\partial \tau} + \sum W'_j \frac{\partial \overline{W'_i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \sum \frac{\partial^2 \overline{W'_i}}{\partial x_j^2} - \rho \sum \overline{w'_j \frac{\partial w'_i}{\partial x_j}} \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là *phương trình Navier - Stokes trung bình hóa Reynolds*. Đối với chất lỏng không nén được, dựa vào phương trình liên tục, từ (1) ta được:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{W'_i}}{\partial \tau} + \sum W'_j \frac{\partial \overline{W'_i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu \frac{\partial \overline{W'_i}}{\partial x_j} - \rho \overline{w'_j w'_i} \right) \quad (2)$$

Các đại lượng mới xuất hiện ở đây (so với chuyển động tầng) [3, 4]:

$$\epsilon_{ij} = -\rho \overline{w'_j w'_i} \quad (3)$$

được gọi là *tenxơ ứng suất Reynolds*.

Như vậy, so với chuyển động tầng, trong dòng rối xuất hiện các thành phần ứng suất tiếp do chuyển động rối (phương trình 3). Để giải hệ trên, ta phải bổ sung thêm các phương trình mới.

Các mô hình rối đơn giản nhất được coi là các mô hình đại số, các mô hình này sử dụng *gradient về độ nhớt xoáy* của Bousinesq để tính ứng suất Reynolds. Prandtl (1925) tiếp tục phát triển ý tưởng trên. Để đơn giản hóa tính toán, độ nhớt xoáy (eddy viscosity) được tính theo *chiều dài hòa trộn* l_{mix} (mixing length). Khái niệm này cũng tương tự như *quãng đường tự do trung bình* trong chất khí l_{mp} (mean free path). Ông hình tượng mô hình chuyển động rối đơn giản, trong đó các phân tử lỏng liên kết nhau thành khối và chuyển động như một đơn vị. Tiếp theo, ông hình dung rằng, trong dòng trượt các khối chất lỏng duy trì động lượng phương x không đổi trên quãng đường l_{mix} theo phương y và gọi đó là *quãng đường hòa trộn*. Khi sử dụng "khối chất lỏng" thay thế cho phân tử và l_{mix} thay thế cho l_{mp} , Prandtl đưa ra được công thức tính ứng suất tiếp do chuyển động rối:

$$\tau_{xy} = \mu_T \frac{dU}{dy} \quad (4)$$

trong đó, U- vận tốc trung bình theo phương x vuông góc với y, và độ nhớt rối:

$$\mu_T = \rho l_{mix}^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \quad (5)$$

Từ khoảng năm 1960 trở lại đây, các mô hình dựa trên các phương trình động năng rối trở thành nền tảng nghiên cứu mô hình rối hiện đại. Prandtl (1945) đã giả định tính thang tốc độ đặc trưng đối với chuyển động rối v_{mix} , nên không buộc phải dùng giả thiết $v_{mix} \approx l_{mix} \left| \frac{dU}{dy} \right|$. Ông chọn động năng rối trên một đơn vị khối lượng của mạch động rối là k (gọi là động năng rối) làm cơ sở của thang tốc độ:

$$k = \frac{1}{2} \sum \overline{w'_i w'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{w'^2_1} + \overline{w'^2_2} + \overline{w'^2_3} \right) \quad (6)$$

Dựa vào thứ nguyên, độ nhớt rối được tính theo mật độ ρ , thang chiều dài rối l , và k :

$$\mu_T = const. \rho k^{1/2} l \quad (7)$$

Từ (3) ta có vết của tenxơ ứng suất Reynolds bằng:

$$tr(\tau_{ij}) = \sum \tau_{ii} = -\rho \sum \overline{w'_i w'_i} = -2\rho k \quad (8)$$

Để thành lập phương trình cho động năng rối k , người ta tính tổng $\sum \overline{w'_i N(w'_i)} = 0$.

trong đó: $N(w_i) = \rho \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} + \sum \omega_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \sum \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}$ là toán tử Navier - Stokes,

và thu được phương trình:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho \sum W_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \sum \tau_{ik} \frac{\partial W'_i}{\partial x_k} - \rho \epsilon + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} (\rho \overline{w'_i w'_i w'_i}) - \overline{p' w'_i} \right) \quad (9)$$

trong đó:

$$\epsilon = \nu \frac{\partial w'_i}{\partial x_k} \frac{\partial w'_i}{\partial x_k}$$

Về trái phương trình (9) bao gồm các thành phần không ổn định và đối lưu, biểu thị thay đổi của động năng rối theo thời gian và theo chuyển động của các phần tử lỏng. Số hạng thứ nhất về phải, biểu thị tốc độ tạo ra động năng rối từ dòng trung bình, được gọi là Sản sinh (Production). Có thể

biểu diễn số hạng này như tích $\tau_{ij} S_{ij}$ (S_{ij} tenxơ tốc độ ứng suất: $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)$) và thấy nó

dường như giống công của tốc độ ứng suất trung bình chống lại ứng suất rối. Tiêu tán năng lượng ϵ biểu thị tốc độ biến đổi của động năng rối thành nội nhiệt năng, nó bằng tốc độ trung bình mà công của phần mạch động tiêu hao do ứng suất nhớt. Đại lượng $\mu \partial k / \partial x_j$ được gọi là Khuếch tán phân tử (Molecular Diffusion), nó đại diện cho sự khuếch tán động năng rối gây ra bởi quá trình truyền phân tử tự nhiên của chất lỏng. Người ta coi tích của ba thành phần vận tốc rối tương quan là Truyền rối (Turbulent Transport) và xem như là tốc độ mà năng lượng rối được truyền đi theo chất lỏng do động mạch rối. Thành phần cuối cùng ở về phải (9) được gọi là Khuếch tán áp suất (Pressure Diffusion), là dạng truyền năng lượng rối nữa đo sự tương quan của các mạch động áp suất và tốc độ.

Để khép kín phương trình trên, nhiều nhà bác học đã đề ra các công thức để đánh giá các đại lượng chưa biết ở trên và thu được mô hình rối một phương trình. Ví dụ, theo Prandtl:

$$\epsilon_y = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (10)$$

trong đó S_{ij} là tenxơ tốc độ ứng suất trung bình, δ_{ij} là ma trận đơn vị. Số hạng thứ hai về phải (10) cần phải có để bảo đảm vết của τ_{ij} đúng. Với chất lỏng không nén được $\sum S_{ii} = 0$ nên

$$\sum \tau_{ii} = -2\rho k$$

Truyền rối và khuếch tán áp suất được giả thiết bằng:

$$\frac{(\rho \overline{w'_i w'_i w'_i}) + \overline{p' w'_i}}{\sigma_k} = -\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (11)$$

trong đó σ_k là hệ số khép kín.

Khi đó (9) trở thành:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho \sum W_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \sum \tau_{ik} \frac{\partial W'_i}{\partial x_k} - \rho \epsilon + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

và tốc độ tiêu tán động năng rối được Prandtl giả định:

$$\epsilon = C_{\epsilon} k^{3/2} / l \quad (13)$$

và mô hình một phương trình của động năng rối đầu tiên có dạng:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho \sum W_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \sum \tau_{ik} \frac{\partial W'_i}{\partial x_k} - \rho C_D k^{3/2} / l + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (14)$$

và $\mu_T = \rho \cdot k^{1/2} \cdot l$ (15)

NGHIÊN CỨU - TRAO ĐỔI

Mô hình này vẫn chưa hoàn thiện vì nó liên hệ thang chiều dài rối với vài kích thước dòng đặc trưng. Trong những thập niên gần đây, mô hình hai phương trình $k-\epsilon$ dường như được phổ biến hơn cả (Chou - 1945; Davidov - 1961; Harlow và Nakayama - 1968; Jones và Lauder - 1972) và ở đây giới thiệu mô hình $k-\epsilon$.

Để lập phương trình cho tốc độ tiêu tán, ta tính mômen sau của phương trình Navier Stokes:

$$\sum_{i,j} 2\nu \frac{\partial w_i'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [N(w_i')] = 0,$$

Tuy vậy, phương trình này đối với tiêu tán còn phức tạp hơn nhiều so với phương trình động năng rối [2, 3], trong đó có chứa các tương quan đôi và ba của mạch động tốc độ, áp suất và gradien tốc độ. Những đại lượng trên không thể xác định được bằng thực nghiệm với độ chính xác bất kỳ, do đó chỉ hy vọng các nhà thực nghiệm cho ra được chỉ dẫn tin cậy để có các gần đúng khép kín thích hợp. Các nghiên cứu như công trình của Mansour, Kim và Moin (1988) đã cho một số hiểu biết về truyền ϵ chính xác đối với các dòng có số Reynolds nhỏ, tuy vậy, cơ sở dữ liệu để thiết lập các gần đúng khép kín giống như đã được dùng cho phương trình k vẫn còn rất hạn chế.

Mô hình $k-\epsilon$ tiêu chuẩn hiện nay đang được sử dụng nhiều [1, 2, 3] có dạng như sau:

$$\mu_T = \rho C_\mu k^2 / \epsilon \tag{16}$$

Phương trình động năng rối (12) và phương trình tốc độ tiêu tán:

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \rho \sum W_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \sum \tau_{ij} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \mu_T / \sigma_\epsilon \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \tag{17}$$

Các hệ số khép kín:

$$C_{\epsilon 1} = 1.44; C_{\epsilon 2} = 1.92; C_\mu = 0.09; \sigma_k = 1.0; \sigma_\epsilon = 1.3 \tag{18}$$

2. Hệ phương trình vi phân diễn tả quá trình đốt cháy nhiên liệu lỏng bằng không khí

Dưới đây xin giới thiệu các phương trình cơ bản đối với hệ thống khí nhiều thành phần có phản ứng hóa học trong buồng đốt (phun nhiên liệu vào) đã được sử dụng trong các công trình tính toán liên quan như cho buồng đốt nội hơi, trong xi lanh động cơ đốt trong [1]. Trong trường hợp cho hệ khí và xảy ra các phản ứng cháy mạnh, thang rối lớn, nên độ nhớt động học μ (của *cháy láng*) được coi là nhỏ so với độ nhớt động học rối μ_T [1]:

* Phương trình liên tục (bảo toàn khối lượng):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \omega) = \dot{\rho} \tag{19.1}$$

* Phương trình bảo toàn động lượng:

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \omega \omega) = -\nabla p - \frac{2}{3} \rho k + \nabla \cdot \sigma + F' + \rho g \tag{19.2}$$

* Phương trình bảo toàn các thành phần hóa học:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho_m \omega) = \nabla \cdot \left[\rho D \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^{\delta_{mj}} \tag{19.3}$$

* Phương trình bảo toàn nội năng:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho u \omega) = -p \nabla \cdot \omega + \nabla \cdot \left(\lambda \nabla I + \rho D \sum_m \nabla (\rho_m / \rho) \right) + \dot{Q}^c + \dot{Q}^{\delta} + \rho \epsilon \tag{19.4}$$

* Phương trình truyền động năng rối:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho k \omega) = -\frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \omega + \frac{\sigma}{\nabla \omega} + \nabla \cdot \left(\left(\frac{\mu_T}{Pr_k} \right) \nabla k \right) - \rho \epsilon + \dot{W}^c \tag{19.5}$$

* Phương trình truyền tốc độ tiêu tán năng lượng rối:

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \omega \epsilon) = -(C_{\epsilon 1} - C_{\epsilon 2}) \rho \epsilon \nabla \cdot \omega + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu_T}{Pr_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \frac{\epsilon}{k} \left[C_{\epsilon 1} \frac{\sigma}{\nabla \omega} - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon + C_\mu \dot{W}^c \right] \tag{19.6}$$

Trong đó: vận tốc trung bình $\omega = \omega_x(x, y, z, \tau) \vec{i} + \omega_y(x, y, z, \tau) \vec{j} + \omega_z(x, y, z, \tau) \vec{k}$; u - nội năng riêng; i_m - entanpi riêng của thành phần m ; các ký hiệu toán tử: $\nabla \cdot = div$, $\nabla = grad$, trong đó

với riêng: $\nabla \omega = [\partial \omega_i / \partial x_j]$ và phép tính: $\sigma / \nabla \omega = \tau (\sigma \cdot \nabla \omega^T) = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial \omega_i / \partial x_j$; σ là tenxơ ứng suất

nhớt: $\sigma_{ij} = \mu_r (\partial \omega_i / \partial x_j + \partial \omega_j / \partial x_i)$, μ_r là độ nhớt động học rối; ρ và ρ_m : mật độ hỗn hợp và của thành phần khí m ; ρ^* và ρ_m^* là các số hạng nguồn, kể tới ảnh hưởng của các pha lỏng và thay đổi mật độ khí m trong các phản ứng hóa học; F^s - thay đổi động lượng trong một đơn vị thể tích do tác dụng của dòng nhiên liệu; g - gia tốc trọng trường; D - hệ số khuếch tán rối; δ - hàm *della Dirac* (ma trận đơn vị); \dot{Q}^c , \dot{Q}^r - số hạng nguồn, kể đến ảnh hưởng tỏa nhiệt của các phản ứng hóa học và bay hơi; Pr_k - số Prandtl đối với k ; Pr_ϵ - số Prandtl đối với ϵ ; W^s - số hạng nguồn, kể tới ảnh hưởng của dòng nhiên liệu trong các phương trình truyền k và ϵ ; C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_k - các hằng số của model rối.

Điều kiện biên cho k và ϵ cũng thu được tương tự khi xét lớp dịch trượt theo quy luật của vách. Ứng suất tiếp được tính nhờ giả thiết coi vận tốc chất lỏng ở các điểm lân cận với thành có phương tiếp tuyến với thành. Coi các ứng suất Reynolds không đổi, nên động năng rối lân cận thành được tính bằng: $k = u^2 / \sqrt{C_\mu}$; $u_* = \sqrt{\tau / \rho}$, trong đó τ là ứng suất tiếp.

Điều kiện biên cho ϵ : $\epsilon = u_*^3 / (Ky)$, trong đó y là khoảng cách tới thành và $K=0.4$ là hệ số Karman.

III. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Bài báo đã trình bày lượng đổi đầy đủ hệ phương trình khép kín diễn tả các quá trình diễn ra trong buồng đốt. Tuy vậy, ngoài các phương trình nêu ở mục II.2, để xây dựng mô hình tính quá trình cháy đầy đủ, cần bổ sung thêm các phương trình cho tốc độ phản ứng hoá học và tạo thành các chất; phương trình diễn tả phân bố chùm tia nhiên liệu vào buồng đốt và tốc độ bay hơi cùng các điều kiện biên khác [1].

Phương trình bảo toàn nội năng đã có trong các giáo trình hiện có, còn phương trình bảo toàn thành phần hóa học cũng được xây dựng một cách tương tự do sự giống nhau giữa truyền nhiệt và khuếch tán nên không trình bày ở đây.

Trong trường hợp chung, chỉ có thể giải hệ trên bằng các phương pháp số. Vấn đề phức tạp nhất là xác định các điều kiện biên và các hằng số của mô hình rối. Dự kiến của chúng tôi là xây dựng chương trình tính toán cho động cơ đốt trong bằng phương pháp sai phân hữu hạn, trên cơ sở so sánh với các công trình đã công bố hoặc thực nghiệm thì sẽ hiệu chỉnh lại các hằng số mô hình này. Việc nghiên cứu và xây dựng cơ sở lý thuyết cho các hằng số này vẫn cần phải được tiếp tục nghiên cứu để có được tính khái quát và sâu hơn những gì đã trình bày.

IV. KẾT LUẬN

Nội dung chính của bài báo tập trung vào cơ sở lý thuyết xây dựng hệ phương trình chuyển động cho dòng rối vì đó là quá trình phức tạp. Có nhiều nhà nghiên cứu khác nhau đưa ra các giả thiết và phương trình khép kín khác nhau, trong đó mỗi thuyết chỉ thích hợp với trường hợp cụ thể riêng. Ngay các hệ số trình bày ở phần cuối, tác giả cũng chưa có điều kiện để kiểm định, các phương trình đã nêu trong mục II.1 cũng chỉ để bạn đọc tham khảo thêm (ngoài ra còn có các dạng khác). Tác giả tập trung vào ý nghĩa vật lý của các đại lượng đặc trưng cho dòng rối nhằm giúp bạn đọc sử dụng dễ dàng hơn để giải các bài toán riêng của mình và có thể đơn giản hoá các phương trình này trong trường hợp có thể ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Эффективность плазмохимических систем для камер сгорания судовых газотурбинных двигателей. Сербин С.И., УГМТУ-Судовые энергетические установки. Научно-технический сборник, 1998.
2. Amsden A.A., O'Rourke P.J., Butler T.D. KIVA-P: A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Sprays. Los Alamos National Laboratory, 1989.
3. A Near-Wall Reynolds-Stress Closure Without Wall Normals. S.P Yuan and R.M.C. So. Mechanical and Aerospace Engineering, 1997.
4. Mean Kinetic Energy. Tony Burden's Lecture Notes on Turbulence, Spring 2008.
5. Mô hình hoá quá trình cháy trong động cơ đốt trong. Bùi Văn Ga, Nxb Giáo dục, 1997.