ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

AMMONE PHOMPHIBAN

IĐÊAN ĐƠN THỨC
VÀ SỰ PHÂN TÍCH CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

AMMONE PHOMPHIBAN

IĐÊAN ĐƠN THỨC VÀ SỰ PHÂN TÍCH CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 62.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Tác giả luận văn

AMMONE PHOMPHIBAN

Xác nhận của khoa Toán

Xác nhận của cán bộ hướng dẫn

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Trần Nguyên An - giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2015

Tác giả luận văn

AMMONE PHOMPHIBAN

MỞ ĐẦU

Định lý Cơ bản của Số học chỉ ra rằng mọi số nguyên $n \geqslant 2$ luôn phân tích được thành tích các số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Trong Đại số có rất nhiều kết quả tương tự nảy sinh, chẳng hạn: mọi đa thức khác hằng trên một trường phân tích được thành tích các đa thức bất khả quy và sự phân tích đó cũng là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Các ví dụ trên đều có một đối tượng chung là phân tích thành nhân tử "bất khả quy", tức là các phần tử không phân tích được thành các nhân tử "không tầm thường". Một cách tổng quát, trong một vành giao hoán có đơn vị R liệu các phần tử của R có thể phân tích được thành tích các phần tử bất khả quy. Một ví dụ chỉ ra điều này không đúng là vành $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Trong vành này ta có $6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.

Vào đầu những năm 1800 Ernst Kummer và Julius Wilhelm Richard Dedekind đã nhận ra rằng bài toán có thể được chỉnh sửa. Thay cho việc phân tích một phần tử $r \in R$ ta phân tích tập rR thành tích $rR = I_1.I_2...I_n, I_i$ là các tập tương tự. Các tập "tương tự" được gọi là các iđêan. Khi đó trong vành $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ta có

$$6R = I_1 I_2 = J_1 J_2$$

là duy nhất sai khác thứ tự các nhân tử. Trong nghiên cứu người ta đã chỉ ra phân tích thành tích các iđêan không có ý nghĩa.

Vào những năm 1900 Emanuel Lasker và Emmy Noether đã nhận ra rằng tốt hơn là ta xét giao thay cho tích. Ý tưởng là tương tự ngoại trừ một iđêan I là bất khả quy nếu nó không phân tích được thành giao của 2 iđêan thực sự chứa I. Họ cũng chỉ ra sự phân tích như vậy tồn tại trong một lớp vành đủ rộng.

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu các iđêan đơn thức trong vành $R = A[X_1, \cdots, X_d]$ với hệ tử trên một vành giao hoán A và các biến $X_1, \cdots, X_d$, tức là các iđêan sinh bởi các đơn thức $X_1^{n_1} \cdots X_d^{n_d}$. Luận văn tìm hiểu kết quả mọi iđêan đơn thức trong R có thể viết thành giao của các iđêan đơn thức "m-bất khả quy", tức là các iđêan đơn thức không thể viết thành giao của các iđêan đơn thức thực sự chứa nó. Một phân tích như vậy gọi là phân tích m-bất khả quy. Cũng phải nói thêm rằng iđêan đơn thức là đơn giản nhất trong vành đa thức. Nhiều kết quả cho thấy việc nghiên cứu một iđêan bất kỳ có thể chuyển về nghiên cứu iđêan đơn thức. Hơn nữa ta có thể dùng iđêan đơn thức để nghiên cứu một số đối tượng trong Tổ hợp, Hình học, Lý thuyết đồ thị, Tôpô và ngược lại.

Luận văn bao gồm 2 chương. Chương 1 tìm hiểu một số vấn đề về iđêan đơn thức: tập sinh của iđêan đơn thức, phép toán trên tập iđêan đơn thức, iđêan đơn thức m-bất khả quy và sự phân tích một iđêan đơn thức thành giao của các iđêan đơn thức bất khả quy.

Chương 2 tìm hiểu về phân tích bất khả quy của một lớp iđêan đặc biệt là iđêan đơn thức không chứa bình phương. Một ví dụ của lớp iđêan đơn thức không chứa bình phương là iđêan cạnh và iđêan mặt, hai đối tượng quan trọng trong Hình học Đại số.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Trần Nguyên An. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy. Tôi xin cảm ơn các thầy cô ở Viện Toán học, Khoa Toán và Khoa Sau Đại học trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn người thân, bạn bè đã cổ vũ và động viên tôi để tôi có thể hoàn thành luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2015

Tác giả luận văn

AMMONE PHOMPHIBAN

Chương 1

Iđêan đơn thức

Trong toàn bộ luận văn ta luôn quy ước vành là vành giao hoán có đơn vị và thường được ký hiệu là A. Để dễ theo dõi ta nhắc lại một số phép toán trên iđêan và vành đa thức.

1.1. Phép toán iđêan

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử I, J là các iđêan của vành A.

(i) *Giao* của I và J là $I \cap J = \{x \in A \mid x \in I$ và $x \in J\}$.

(ii) *Tổng* của I và J là $I + J = \{x + y \mid x \in I$ và $y \in J\}$.

(iii) *Tích* của I và J là $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in I$ và $y_i \in J\}$.

Đặc biệt nếu $I = \langle x \rangle$ thì $I.J = \{xy \mid y \in J\}$, còn được ký hiệu là xJ

(iv) *Thương* của I và J là $I : J = \{x \in A \mid xJ \subseteq I\}$.

(v) *Căn* của I là $\operatorname{rad}(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

Mệnh đề 1.1.2. *Giả sử I, J, K là các iđêan của vành A. Khi đó*

(i) $I \cap J$, $I + J$, IJ, $I : J$, $\operatorname{rad} I$ là các iđêan của A, $I + J$ sinh bởi $I \cup J$, IJ sinh bởi $X = \{xy \mid x \in I, y \in J\}$.

(ii) Phép lấy giao, tổng và tích các iđêan có tính chất giao hoán, kết hợp.

(iii) $I(J + K) = IJ + IK$.

Ví dụ 1. Trong $\mathbb{Z}$, cho $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$. Ta có $I \cap J = \mathrm{BCNN}(m, n)\mathbb{Z}$; $I + J = \mathrm{UCLN}(m, n)\mathbb{Z}$; $IJ = m.n\mathbb{Z}$; $I : J = \frac{m}{\mathrm{UCLN}(m,n)}\mathbb{Z}$. Giả sử $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_1 \dots p_n$ là các số nguyên tố phân biệt thì $\mathrm{rad}(m\mathbb{Z}) = p_1 \dots p_n\mathbb{Z}$.

Ta có thể định nghĩa giao và tổng của một họ bất kỳ các iđêan.

Định nghĩa 1.1.3. Cho $(I_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ là họ các iđêan của A. Giao của họ là iđêan của A xác định bởi

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \{x \in A \mid x \in I_\alpha, \forall\alpha \in \Gamma\}.$$

Tổng của họ là các iđêan, ký hiệu $\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$ là các iđêan của A sinh bởi $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$. Ta có

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \{\sum_{\alpha\in\Omega} x_\alpha \mid x_\alpha \in I_\alpha, \Omega \subseteq \Gamma, |\Omega| < \infty\}.$$

Lũy thừa của iđêan I của A được xác định bởi $\underbrace{I...I}_{\text{n lần}}$ nếu $n > 0$ và $I^0 = A$.

Ta dễ thấy nếu I là iđêan sinh bởi tập $\{x_1, ..., x_t\}$ thì I^n sinh bởi tập

$$\{x_1^{k_1}...x_t^{k_t} \mid \sum_{i=1}^{t} k_i = n\}.$$

Mệnh đề 1.1.4. *Giả sử* $I, J, K, (I_i)_{i\in\Lambda}, (J_j)_{j\in\Gamma}$ *là các iđêan của vành A. Khi đó*

(i) $I \subseteq I : J$.

(ii) $(I : J)J \subseteq I$.

(iii) $(I : J) : K = I : JK = (I : K) : J$.

(iv) $\bigcap_{i\in\Lambda} I_i : J = \bigcap_{i\in\Lambda}(I_i : J)$.

(v) $I : (\sum_{j\in\Gamma} J_j) = \bigcap_{j\in\Gamma}(I : J_j)$.

Mệnh đề 1.1.5. *Giả sử I, J, K là các iđêan của A. Khi đó*

(i) $I \subseteq \mathrm{rad}(I)$. *Nếu* $I \subseteq J$ *thì* $\mathrm{rad}(I) \subseteq \mathrm{rad}(J)$.

(ii) $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I)) = \mathrm{rad}(I)$.

(iii) $\mathrm{rad}(IJ) = \mathrm{rad}(I \cap J) = \mathrm{rad}(I) \cap \mathrm{rad}(J)$.

(iv) $\mathrm{rad}(I) = R$ *khi và chỉ khi* $1 \in I$.

(v) $\mathrm{rad}(I + J) = \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I) + \mathrm{rad}(J))$.

1.2. Vành đa thức nhiều biến

Trước hết ta có một vài quy ước và ký hiệu. Cho d là một số nguyên dương, $X_1, ..., X_d$ là các phần tử của A. Phần tử có dạng $X_1^{n_1}...X_d^{n_d} \in A$, trong đó $n_1, ..., n_d \in \mathbb{N}$ được gọi là một đơn thức của các phần tử $X_1, ..., X_d$. Để đơn giản ta ký hiệu $\underline{n} = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}^d$ và $\underline{X}^{\underline{n}} = X_1^{n_1} \cdots X_d^{n_d}$. Phép cộng và phép nhân với vô hướng trên $\mathbb{N}^d$ xác định bởi: với $\underline{m} = (m_1, ..., m_d)$, $p \in \mathbb{N}$

$$\underline{n} + \underline{m} = (n_1 + m_1, ..., n_d + m_d), p\underline{n} = (pn_1, ..., pn_d).$$

Với các ký hiệu trên ta cũng có $\underline{X}^{\underline{m}}\underline{X}^{\underline{n}} = \underline{X}^{\underline{m}+\underline{n}}, (\underline{X}^{\underline{m}})^p = \underline{X}^{p\underline{m}}$.

Cho d là một số nguyên dương và xét quan hệ $\geqslant$ trên $\mathbb{N}^d$ như sau: $(a_1, \ldots, a_d) \geqslant (b_1, \ldots, b_d)$ khi $a_i \geqslant b_i$ theo thứ tự thông thường trên $\mathbb{N}$, với $i = 1, \ldots, d$. Ta có $\geqslant$ là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$.

Ví dụ 2. Khi $d = 2$, ta có đồ thị tập hợp $\{\underline{n} \in \mathbb{N}^2 \mid \underline{n} \geqslant (1, 2)\}$ như Hình 1.1.

Định nghĩa 1.2.1. Cho d là một số nguyên dương. Với mỗi $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, ta định nghĩa

$$[\underline{n}] = \{\underline{m} \in \mathbb{N}^d \mid \underline{m} \geqslant \underline{n}\} = \underline{n} + \mathbb{N}^d.$$

Ví dụ 3. Khi $d = 2$, đồ thị của $[(1, 2)] \cup [(3, 1)]$ có dạng Hình 1.2.