ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÙI THỊ HẬU

ĐỊNH LÝ CANTOR VÀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN 2- METRIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÙI THỊ HẬU

ĐỊNH LÝ CANTOR VÀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN 2- METRIC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Trần Phương

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình được trình bày theo nhận thức của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn, tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo tính trung thực chính xác.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Hậu

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **PGS. TS. Hà Trần Phương**. Người thầy đã dành rất nhiều tâm huyết và thời gian quý báu để hướng dẫn tận tình chỉ bảo, giúp đỡ động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Sở Giáo Dục đào tạo Hòa Bình, trường THPT Ngô Quyền nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn cổ vũ động viên để tôi hoàn thành luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô và độc giả quan tâm đến luận văn để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2015

Tác giả luận văn

Bùi Thị Hậu

Mục lục

Mở đầu

Không gian 2-metric đã được xây dựng bởi Gahler trong một loạt các bài báo (xem [4], [5], [6]). Không gian này có một cấu trúc phi tuyến khá độc đáo và khác lạ với các không gian metric thông thường, do đó nó thu hút được sự nghiên cứu của nhiều tác giả khác nhau. Trong [4], Gahler đã chỉ ra một cách tường minh một cơ sở của không gian tôpô được xây dựng từ không gian $2-$metric và nghiên cứu một số tính chất của không gian này. Tuy nhiên các tính chất đó vẫn còn khá đơn giản. Năm 1969, Gahler và White (xem, [20]) đã mở rộng khái niệm không gian 2-Banach, trong đó White đã thiết lập định lý Hahn-Banach trong không gian 2-Banach. Định lý Banach-Steinhaus cũng đúng trong không gian 2-Banach (xem [11]). Gần đây Lahiri. B. K, Das. P, Dey. L. K ([12]) đã nghiên cứu cẩn thận hơn một số tính chất của không gian $2-$metric về định lý kiểu Cantor, Baire cho không gian 2-metric.

Cũng giống như trong các không gian khác, lý thuyết các điểm bất động của các ánh xạ cũng đã được phát triển trong không gian 2-metric. Năm 1976, Iseki. P ([8]) đã thu được kết quả cơ bản đầu tiên về điểm bất động cho các ánh xạ giữa các không gian 2-metric, tiếp theo ông đã nghiên cứu các dạng định lý đó cho không gian 2-Banach (xem [8], [9]). Sau các kết quả của Iseki, một số tác giả đã mở rộng và khái quát hóa các định lý điểm bất động trong không gian 2-metric và không gian 2-Banach với nhiều loại ánh xạ khác nhau (xem [7], [9], [13], [14], [15], [17], [19]). Trong [12], các tác giả đã sử dụng các định lý kiểu Cantor để đưa ra một dạng định lý điểm bất động xem như là ứng dụng của định lý này. Ngoài ra còn có nhiều tác giả khác nghiên cứu về các dạng định lý điểm bất động của ánh xạ trên không gian 2-metric.

Với mong muốn tìm hiểu về không gian 2-metric và nghiên cứu các dạng định lý điểm bất động của ánh xạ trên các không gian 2-metric, chúng tôi chọn đề tài **Nguyên lý Cantor và một số định lý điểm bất động trong không gian 2-metric**. Mục đích chính của luận văn là giới thiệu các kiến thức cơ bản của không gian 2-metric, chứng minh lại các định lý Cantor, Baire đã được Lahiri. B. K, Das. P, Dey. L. K công bố trong [12]. Ngoài ra, luận văn cũng giới thiệu một số dạng định lý điểm bất động được chứng minh bởi Lahiri. B. K, Das. P, Dey. L. K ([12]), Lai. S. N, Singh. A. K ([10]) và Dey. M, Saha. M ([1],[18]).

Luận văn chia thành hai chương, Chương 1 giới thiệu về không gian 2-metric và chứng minh nguyên lý Cantor, Baire. Trong Chương 2, chúng tôi sẽ chứng minh một số dạng định lý điểm bất động của ánh xạ trên lớp không gian này.

Chương 1

Nguyên lý Cantor trong không gian 2−metric

1.1. Không gian 2−metric

1.1.1. Sự hội tụ trong không gian 2−metric

Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1. Cho X là một tập khác rỗng, trong luận văn này ta luôn giả thiết X là một tập vô hạn. Một ánh xạ

$$\sigma : X \times X \times X \to \mathbb{R}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Với mỗi cặp điểm phân biệt a, b tồn tại một điểm $c \in X$ sao cho $\sigma(a, b, c) \neq 0$;

(ii) $\sigma(a, b, c) = 0$ nếu hai trong ba điểm là trùng nhau;

(iii) $\sigma(a, b, c) = \sigma(a, c, b) = \sigma(b, c, a)$ với mọi $a, b, c \in X$;

(iv) $\sigma(a, b, c) \leq \sigma(a, b, d) + \sigma(a, d, c) + \sigma(d, b, c)$ với mọi a, b, c và $d \in X$.

Khi đó σ được gọi là 2-*metric* trên X.

Ta dễ dàng nhận thấy rằng σ là một hàm không âm. Hơn nữa, với mọi $a, b, c \in X$, với mọi hoán vị (a_1, b_1, c_1) của (a, b, c) ta luôn có

$$\sigma(a_1, b_1, c_1) = \sigma(a, b, c).$$

Cặp (X, σ), trong đó $X \neq \emptyset$, σ là một $2-$metric trên X được gọi là *không gian 2-metric*. Đôi khi không gian 2-metric (X, σ) được kí hiệu ngắn gọn là X nếu không nhầm lẫn.

Mỗi $a \in X$ được gọi là một phần tử hay một điểm, $\sigma(a, b, c)$ được gọi là 2-metric giữa 3 phần tử a, b, c.

Ví dụ 1.1. Cho $X = \mathbb{R}^2$, với mỗi $x, y, z \in X$, đặt $\sigma(x, y, z)$ là diện tích tam giác có ba đỉnh là x, y, z. Khi đó, σ sẽ là một $2-$metric trên $\mathbb{R}^2$ và $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ là một không gian $2-$metric.

Nhận xét 1.1. *Cho (X, σ) là một không gian $2-$metric, $a, b \in X$, nếu $\sigma(x, y, z) = 0$ với mọi $z \in X$ thì $x \equiv y$. Điều này là hiển nhiên vì nếu $x \neq y$ thì theo điều kiện (i) sẽ tồn tại $z \in X$ sao cho $\sigma(x, y, z) \neq 0$.*

Không gian con

Cho (X, σ) là một không gian $2-$metric, $M \subset X$. Đặt

$$\sigma_M = \sigma|_{M \times M \times M}.$$

Khi đó nếu σ_M là một $2-$metric trên M thì (M, σ_M) gọi là *không gian con* của không gian $2-$metric (X, σ). σ_M được gọi là $2-$metric cảm sinh bởi σ trên M.

Chú ý 1.1.

1. Ta có thể trang bị cho M những $2-$metric khác để M trở thành không gian $2-$metric, tuy nhiên trong trường hợp này M không là không gian con của X.

2. Đối với trường hợp không gian metric (X, d) và $M \subset X$ thì $d|_{M \times M}$ luôn là một metric trên M. Tuy nhiên, trường hợp không gian $2-$metric (X, σ) thì chưa chắc $\sigma_M = \sigma|_{M \times M \times M}$ đã là $2-$metric trên M. Ta có thể chỉ ra ví dụ cụ thể là không gian $2-$metric $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ trong Ví dụ 1.1 với việc chọn $M = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Sự hội tụ trong không gian 2-metric

Cho (X, σ) là một không gian 2-metric và $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X.

Định nghĩa 1.2. Dãy $\{x_n\}$ trong (X, σ) được gọi là hội tụ về $x \in X$ nếu với bất kỳ $a \in X$,

$$\sigma(x_n, x, a) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Ta viết $x_n \to x$ khi $n \to \infty$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Mệnh đề 1.2. *Trong không gian 2−metric (X, σ), giới hạn của một dãy nếu có là duy nhất.*

Chứng minh. . Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ trong X. Khi đó, với mỗi $z \in X$,

$$\sigma(a, b, z) \leqslant \sigma(a, b, x_n) + \sigma(a, x_n, z) + \sigma(x_n, b, z)$$

với mọi n. Cho $n \to \infty$ ta có $\sigma(a, b, z) = 0$. Từ Nhận xét 1.1 kéo theo $a = b$. Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.3. ([12]) *Cho $\{y_n\}$ là một dãy trong không gian 2−metric (X, σ). Với mỗi $a \in X$, đặt $\sigma_n(a) = \sigma(y_n, y_{n+1}, a)$. Giả sử rằng $\sigma_n(y_m) = 0$ với mọi số nguyên không âm m, n với $n > m$. Khi đó $\sigma(y_i, y_j, y_k) = 0$ với mọi bộ các số nguyên không âm i, j, k.*

Chứng minh. . Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $k \leqslant i \leqslant j$. Do nếu $k = i$ hoặc $i = j$ thì $\sigma(y_i, y_j, y_k) = 0$. Ta xét trường hợp $k < i < j$.

Đặt $j = i + p$, trong đó $p \geqslant 1$. Ta chứng minh $\sigma(y_i, y_j, y_k) = 0$ bằng quy nạp theo p.

Với $p = 1$, đẳng thức hiển nhiên đúng theo giả thiết. Giả sử đẳng thức đúng với p, ta có

$$\begin{aligned}\sigma(y_i, y_{i+p+1}, y_k) &\leqslant \sigma(y_i, y_{i+p+1}, y_{i+p}) + \sigma(y_i, y_{i+p}, y_k) + \sigma(y_{i+p}, y_{i+p+1}, y_k)\\ &= 0\end{aligned}$$

theo giả thiết quy nạp. Vậy khẳng định đúng với $p + 1$, tức là đúng với mọi p. □

1.1.2. Tôpô trên không gian 2-metric

Cho (X, σ) là một không gian 2-metric.