ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

BÙI THỊ KIỀU OANH

VỀ KHÔNG ĐIỂM CỦA CÁC ĐA THỨC ĐẠO HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

BÙI THỊ KIỀU OANH

VỀ KHÔNG ĐIỂM CỦA CÁC ĐA THỨC ĐẠO HÀM

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TSKH. TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên - Năm 2015

Lời cam đoan

Luận văn này là sự nghiên cứu độc lập của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn, các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình này.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Kiều Oanh

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới dự hướng dẫn khoa học của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS. TSKH. Trần Văn Tấn, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, khoa Sau đại học - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán k21b, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Do thời gian ngắn và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015

Tác giả

Bùi Thị Kiều Oanh

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Lý thuyết Nevanlinna là một lý thuyết đẹp của giải tích phức trong thế kỷ 20, được phát triển bởi nhà Toán học R. Nevanlinna. Nó một trong những phần quan trọng nhất của giải tích phức. Hiện nay lý thuyết Nevanlinna trở thành trung tâm của giải tích phức và tìm thấy ứng dụng ngay cả trong những lĩnh vực tưởng chừng rất xa như: lý thuyết số, phương trình vi phân, vật lý. Những tên tuổi lớn nhất đóng góp cho lý thuyết Nevanlinna cũng đồng thời là những tên tuổi lớn nhất của toán học: R. Nevanlinna, H.Cartan, H.Weyl, L.Alhfors, Ph.Griffiths, ... Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna là một kết quả rất sâu sắc trong Giải tích phức. Một trong những kết quả sâu sắc trong giải tích phức một biến là Định lý Picard về giá trị ngoại lệ, định lý Picard nói rằng một hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$ mà bỏ qua 3 giá trị thì f phải là hàm hằng. Đây cũng là điều khác biệt cơ bản giữa giải tích thực và giải tích phức. Chúng ta đều biết rằng Định lý Picard cũng chỉ là một hệ quả của Định lý cơ bản thứ hai. Nhằm giảm số điểm cần tránh trong Định lý Picard, năm 1958, Hayman đã chứng minh Định lý kiểu Picard cho hàm phân hình và đạo hàm "Nếu hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$ thỏa mãn $f \neq 0$ và $f' \neq 1$ thì f phải là hàm hằng". Hayman có được kết quả này từ Định lý "Hayman's Alternative" trong "Picard value of meromorphic functions and their derivatives", Ann. of Math. $\mathbf{70}(1959), 9-42$. Kể từ sau bài báo này của Hayman, có rất nhiều tác giả đã nghiên cứu phân bố giá trị cho hàm phân hình và đạo hàm, và tổng quát kết quả của Hayman trong những tình huống khác nhau. Hiện nay hướng nghiên cứu này đang phát triển hết sức mạnh mẽ, thu được nhiều kết quả quan trọng trong cả giải tích phức và giải tích $p-$ adic. Chính vì vậy, chúng tôi chọn đề tài "Về không điểm của đa thức đạo hàm" thuộc hướng nghiên cứu nói trên.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình và đạo hàm. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu các vấn đề trong luận văn.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một số kết quả của W. Hayman, W. Bergweiler, J. K. Langley, A. Eremenko và một số tác giả khác trong hướng nghiên cứu này.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm 3 chương

Chương 1. Lý thuyết Nevanlinna và sự phân bố giá trị của hàm phân hình

Chương 2. Về định lý lựa chọn Hayman

Chương 3. Về không điểm của đa thức đạo hàm của một hàm phân hình

Chương 1

Lý thuyết Nevanlinna và sự phân bố giá trị của hàm phân hình

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số Định nghĩa, kết quả cơ bản của Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

1.1 Một số định nghĩa cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ là một hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ trừ ra các điểm bất thường là cực điểm.

Cho n là số tự nhiên không âm.

Định nghĩa 1.1.2. Cho f là hàm chỉnh hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Một điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là không điểm cấp n của f nếu trong lân cận của z_0, f có biểu diễn dưới dạng $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$, $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của z_0, $h(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Một điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là cực điểm cấp n của f nếu z_0 là không điểm cấp n của hàm $\dfrac{1}{f}$.

Các không điểm, cực điểm có cấp 1 còn được gọi là các không điểm và cực điểm đơn.

Ví dụ 1.1.4. Hàm $\sin^2 z$ có không điểm cấp 2 tại $z_0 = 0$. Hàm $\tan z$ có cực điểm đơn tại $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

1.2 Công thức Poisson -Jensen

Định lý 1.2.1. (Công thức Poisson -Jensen) *Cho $f(z)$ là hàm phân hình trong hình tròn $\{|z| \le R\}; 0 < R < +\infty$ và $f(z) \not\equiv 0$. Giả sử $a_\mu\,(\mu = 1, 2, ..., M)$ là các không điểm, mỗi không điểm được kể một số lần bằng bội của nó, $b_v\,(v = 1, 2, ..., N)$ là các cực điểm của f trong hình tròn đó, mỗi cực điểm được kể một số lần bằng bội của nó. Khi đó nếu $z = r.e^{i\phi}, (0 < r < R), f(z) \ne 0, f(z) \ne \infty$ thì*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\mathrm{Rrcos}(\phi - \theta) + r^2} d\theta$$

$$+\sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a_\mu} z}\right| - \sum_{v=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - a_v)}{R^2 - \overline{a_v} z}\right|. \qquad (1.1)$$

Công thức (1.1) chỉ ra rằng nếu biết giá trị của môđun $f(z)$ trên biên, các cực điểm và không điểm của $f(z)$ trong $|z| < R$ thì ta có thể tìm được giá trị của môđun $f(z)$ bên trong đĩa $|z| < R$.

Trường hợp đặc biệt tại $z = 0$ công thức (1.1) có dạng

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{v=1}^{N} \log\frac{|b_v|}{R}, \qquad (1.2)$$

với giả thiết hàm $f(0) \ne 0; f(0) \ne \infty$.

Trong trường hợp $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = \infty$, công thức (1.2) thay đổi một chút. Khi đó hàm $f(z)$ có khai triển tại lân cận $z = 0$ dạng

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda + \dots, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Ta xét hàm

$$\psi(z) = R^\lambda \frac{f(z)}{z^\lambda}.$$

Khi đó ta thấy $\psi(0) \neq 0, \infty$, đồng thời khi $z = Re^{i\theta}$, $|\psi(z)| = |f(z)|$. Từ đó ta có

$$\log|c_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta + \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{|b_\nu|}{R} - \lambda \log R.$$

1.3 Các hàm Nevanlinna

Với mỗi số thực không âm x, ta ký hiệu

$$\log^+(x) = \max\{\log x; 0\}.$$

Cho f là hàm phân hình trên đĩa $D(r) = \{z \in C : |z| < r\}$, với $0 < r \leq \infty$. Ta kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm của f trong đĩa đóng $\overline{D}$(r).

Hàm đếm tại cực điểm của f, ký hiệu $N(r, f)$ và được xác định như sau

$$N(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\log \mathrm{r},$$

trong đó $n(0,f) = \liminf_{t\to 0} n(t,f)$.

Hàm xấp xỉ của hàm f được kí hiệu $m(r,f)$ và được xác định bởi

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Hàm đặc trưng Nevanlinna của f, ký hiệu là $T(r,f)$ và được xác định bởi

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ký hiệu $n(r, \dfrac{1}{f-a})$ là *số các $a-$ điểm* của f kể cả bội trong đĩa đóng $\overline{D}$(r).

Hàm đếm tại các $a-$ điểm của f, ký hiệu là $N(r, \dfrac{1}{f-a})$, được xác