ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH KIÊN

BÀI TOÁN
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VỚI HÀM MỤC TIÊU PHỤ THUỘC THAM SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH KIÊN

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VỚI HÀM MỤC TIÊU PHỤ THUỘC THAM SỐ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS TRẦN VŨ THIỆU

THÁI NGUYÊN – 2014

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu và kết quả nghiên cứu nêu trong luận văn là trung thực, chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thành Kiên

LỜI NÓI ĐẦU

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) một hàm tuyến tính với các biến số thỏa mãn các ràng buộc đẳng thức (hay bất đẳng thức) tuyến tính. Ở dạng chung nhất, qui hoạch tuyến tính có thể hiểu là bài toán $\min\{c^T x : x \in D\}$, trong đó $c \in \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đa diện, nghĩa là tập các nghiệm của một hệ đẳng thức (hay bất đẳng thức) tuyến tính và $x \in \mathbb{R}^n$ là véctơ biến cần tìm.

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đơn giản nhất và được ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn. Đôi khi các hệ số trong bài toán, nói riêng là các hệ số mục tiêu (như giá cả, lợi nhuận, ...), không hoàn toàn được xác định trước mà có thể biến động. Cũng vậy, trong nhiều bài toán qui hoạch toán học, các dữ liệu ban đầu thường phụ thuộc một tham số nào đó. Các bài toán như thế gọi là bài toán *qui hoạch tham số* (parametric programming). Vì thế, để tìm lời giải cho các bài toán loại này ta cần nghiên cứu qui hoạch tham số.

Có nhiều dạng bài toán phụ thuộc tham số. Chẳng hạn, với bài toán qui hoạch tuyến tính, có thể các hệ số mục tiêu hay các hệ số ở vế phải hệ ràng buộc hoặc cả hai phụ thuộc tham số. Cũng có thể hệ số của các biến trong bài toán phụ thuộc tham số ... Luận văn này đề cập tới một lớp bài toán qui hoạch tham số điển hình, thường gặp. Đó là bài toán qui hoạch tuyến tính với *hệ số mục tiêu phụ thuộc tuyến tính vào một tham số*, gọi tắt là *qui hoạch tuyến tính tham số*.

Qui hoạch tuyến tính tham số nghiên cứu tính chất của nghiệm tối ưu phụ thuộc tham số và đề xuất các phương pháp tìm nghiệm tối ưu theo tham số. Các nghiên cứu này bắt đầu từ những năm 1950, gần như cùng thời với sự ra đời của qui hoạch tuyến tính.

Mục tiêu của luận văn này là tìm hiểu và trình bày nội dung bài toán qui hoạch tuyến tính và bài toán vận tải với hàm mục tiêu phụ thuộc tuyến tính vào một tham số, tính chất hàm giá trị tối ưu của bài toán, phương pháp giải bài toán với các khoảng giá trị khác nhau của tham số, tìm ví dụ số minh hoạ cho thuật toán giải qui hoạch tuyến tính tham số và bài toán vận tải tham số và ứng dụng phương pháp qui hoạch tuyến tính tham số tìm các nghiệm tối ưu Pareto (các điểm hữu hiệu) của bài toán qui hoạch tuyến tính hai mục tiêu.

Nội dung luận văn được viết thành ba chương:

Chương 1 **"Bài toán qui hoạch tuyến tính tham số"** giới thiệu tóm tắt về bài toán qui hoạch tuyến tính và phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính. Sau đó tập trung giới thiệu bài toán qui hoạch tuyến tính tham số với các hệ số mục tiêu phụ thuộc tuyến tính vào một tham số và trình bày thuật toán đơn hình tham số tìm lời giải tối ưu cho bài toán với mọi tham số $\lambda \in \mathbb{R}$ hoặc $\lambda \in \left[\underline{t}, \overline{t}\right]$, trong đó $\underline{t}$ và $\overline{t}$ cho trước. Hàm giá trị tối ưu $\varphi(\lambda)$ là một hàm lõm liên tục, tuyến tính từng khúc (đối với bài toán min) và là hàm lồi liên tục, tuyến tính từng khúc (đối với bài toán max).

Chương 2 **"Bài toán qui hoạch tuyến tính hai mục tiêu"** giới thiệu vắn tắt về khái niệm tối ưu Pareto trong các bài toán qui hoạch tuyến tính với nhiều hàm mục tiêu và trình bày ứng dụng thuật toán đơn hình tham số vào tìm tập điểm hữu hiệu (tức lời giải tối ưu Pareto) của bài toán tuyến tính hai mục tiêu. Thuật toán tham số cho phép tìm được tất cả các điểm hữu hiệu, tập này tạo nên *đường tối ưu Pareto* của bài toán.

Chương 3 **"Bài toán vận tải tham số"** trình bày kết quả về bài toán vận tải tham số, với tham số có mặt ở hàm mục tiêu của bài toán. Nêu thuật toán thế vị tìm lời giải cơ sở tối ưu trong các khoảng tham số khác nhau và nêu ví dụ số cho thấy hàm giá trị tối ưu của hai bài toán là hàm lõm liên tục, tuyến tính từng khúc.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này

còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học -Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Đặc biệt tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn GS -TS Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ để tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2014.

Người thực hiện

Nguyễn Thành Kiên

Chương 1

BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này đề cập tới bài toán qui hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu phụ thuộc tham số. Phần đầu nhắc lại các kiến thức cơ sở về qui hoạch tuyến tính và phương pháp đơn hình. Tiếp đó trình bày nội dung bài toán qui hoạch tham số và giới thiệu thuật toán giải bài toán, dựa trên các kỹ thuật tính toán của phương pháp đơn hình. Cuối chương nêu các ví dụ số minh họa cho thuật toán giải qui hoạch tham số. Nội dung của chương dựa chủ yếu vào các tài liệu [1] - [4].

1.1 QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1.1.1 Bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) một hàm tuyến tính với các biến số thỏa mãn các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Bài toán qui hoạch tuyến tính bất kỳ có thể đưa về dạng chính tắc sau:

$$\min \left\{ c^T x : Ax = b, x \geq 0 \right\}, \tag{1.1}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ và $x \geq 0$ có nghĩa là $x \in \mathbb{R}^n_+$. Ta giả thiết $m \leqslant n$ và rank (A) = m, nghĩa là không có ràng buộc thừa trong số các đẳng thức.

Ta nhắc lại một số định nghĩa: Hàm $f(x) = c^T x$ gọi là *hàm mục tiêu* (objective function). Tập $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ gọi là *miền ràng buộc* (constraint set) của bài toán. Như đã biết trong giải tích lồi, D xác định như trên là một *tập lồi đa diện* (polyhedron) và D có đỉnh. Véctơ $x \in D$, tức là $Ax = b, x \geq 0$, gọi là một *lời giải chấp nhận được* (feasible solution). Lời giải chấp nhận được đạt giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu $c^T x$ gọi là một *lời giải tối ưu* (optimal solution). Một điểm $x^0 \in D$ gọi là *điểm cực biên* (extreme point) hay *đỉnh* (vertex) của tập lồi đa diện D nếu không có đoạn thẳng nào $\left[x^1, x^2\right] \subset D$ mà $x^1 \neq x^2$ và $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với $0 < \lambda < 1$. Một lời giải của bài toán (1.1) mà là điểm cực biên của D gọi là một *lời giải cơ sở* (basic solution).

Định lý sau nêu một đặc trưng cho lời giải cơ sở của bài toán chính tắc.

Định lý 1.1([2], Định lý 3.4). *Ký hiệu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các cột của ma trận A. Một lời giải chấp nhận được $\bar{x} \in D$ của bài toán (1.1) là lời giải cơ sở khi và chỉ khi tập véctơ $\{A_j : \bar{x}_j > 0\}$ độc lập tuyến tính.*

Định lý sau cho biết khi nào bài toán qui hoạch tuyến tính có lời giải tối ưu.

Định lý 1.2([2], Định lý 3.2). *$D \neq \varnothing$ và nếu hàm mục tiêu $c^T x$ bị chặn dưới trên D thì bài toán (1.1) chắc chắn có lời giải tối ưu.*

Định lý sau khẳng định lời giải tối ưu đạt được tại một đỉnh của D.

Định lý 1.3([2], Định lý 3.6). *Qui hoạch tuyến tính chính tắc có lời giải tối ưu thì cũng có lời giải cơ sở tối ưu.*

1.1.2 Phương pháp đơn hình

Phương pháp đơn hình do G. B. Dantzig đề xuất năm 1947 là phương pháp quen thuộc và hiệu quả để giải các dạng bài toán qui hoạch tuyến tính. Hơn nữa, phương pháp đơn hình còn được cải biên, mở rộng để giải nhiều bài toán khác như: qui hoạch toàn phương, qui hoạch phân tuyến tính, bài toán bù tuyến tính, qui hoạch tuyến tính đa mục tiêu, ...

Phương pháp đơn hình cũng có nhiều biến thể khác nhau tùy theo đặc điểm bài toán cần giải: đơn hình gốc, đơn hình đối ngẫu, đơn hình gốc - đối ngẫu, đơn hình cải biên, ... Trong mục này ta sẽ trình bày phương pháp đơn hình dạng gốc giải qui hoạch tuyến tính chính tắc.

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính (1.1). Hàm mục tiêu $f(x) = c^T x$ tuyến tính nên nếu f(x) bị chặn dưới trên miền ràng buộc

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqslant 0\}$$

thì theo các Định lý 1.2 và 1.3, $f(x) = c^T x$ đạt cực tiểu tại ít nhất một điểm cực biên của D. Vậy chỉ cần tìm điểm cực tiểu trong tập các điểm cực biên của miền ràng buộc D, tức là trong tập các lời giải cơ sở. Ta bắt đầu từ một lời giải cơ sở.

Cho $\bar{x}$ là một lời giải cơ sở (cách tìm sẽ mô tả sau), ứng với cơ sở B. Ở đây cơ sở B được hiểu là một tập chỉ số với các tính chất:

a) $B \subset \{1, ..., n\}, |B| = m$ (B gồm m chỉ số);

b) $B \supseteq \{j : \bar{x}_j > 0\}$, tức là $\bar{x}_j = 0$ với mọi $j \notin B$;

c) Hệ véctơ $\{A_j : j \in B\}$ độc lập tuyến tính.

Đặt $N = \{1, ..., n\} \setminus B$. Biến $x_j, j \in B$, gọi là *biến cơ sở* (basic variable), biến $x_j, j \in N$, gọi là *biến ngoài cơ sở* hay *biến phi cơ sở* (nonbasic variable).

Ta phân hoạch $A = (A_B, A_N)$, trong đó $A_B = \{A_j : j \in B\}$ là ma trận vuông không thoái hóa, lập nên bởi m véctơ cột A_j của A với chỉ số $j \in B$ và $A_N = \{A_j : j \in N\}$ là ma trận lập nên bởi n - m véctơ A_j còn lại của A với chỉ số $j \in N$. Tương tự, ta viết $c = (c_B, c_N)$ với c_B và c_N là véctơ gồm các thành phần c_j của c với $j \in B$ và $j \in N$ tương ứng. Cách viết $x = (x_B, x_N)$ có ý nghĩa tương tự. Để cho tiện, ta cũng gọi A_B là cơ sở và $A_j, j \in B$, là véctơ cơ sở, còn $A_j, j \in N$, là *véctơ ngoài cơ sở* hay *véctơ phi cơ sở*.

Tương ứng với cơ sở B, phương trình $Ax = b$ trở thành $A_B x_B + A_N x_N = b$. Từ đó $x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N)$ (nói riêng $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$), suy ra công thức biểu diễn các biến cơ sở theo các biến ngoài cơ sở

$$x_B = \bar{x}_B - A_B^{-1} A_N x_N.$$

Do đó

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T \bar{x}_B - c_B^T A_B^{-1} A_N x_N + c_N^T x_N$$

hay

$$c^T x = c_B^T \bar{x}_B - (c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) x_N \tag{1.2}$$

Vì thế, nếu $\Delta_N = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) \leqslant 0$ thì $\bar{x}$ tối ưu. Còn nếu Δ_N có một thành phần dương, chẳng hạn $\Delta_k > 0$ với một chỉ số $k \in N$ nào đó, thì công thức (1.2) cho thấy rằng khi tăng x_k có thể làm giảm $c^T x$, nghĩa là đưa k vào B thay thế cho một phần tử thích hợp trong B ta sẽ có một cơ sở mới B' chấp nhận được tốt hơn (hay ít nhất không kém). Đó là ý tưởng chính của phương pháp đơn hình để giải qui hoạch tuyến tính chính tắc.

Để đơn giản, giả sử rằng B = 1, ... , m. Nếu ma trận $A_B^{-1} A_N = [Z_{ik}, i \in B, k \in N]$ thì $\Delta_k = \sum\limits_{i \in B} c_i z_{ik} - c_k$ và công thức (1.2) có thể viết lại thành

$$c^T x = c^T \bar{x} - \sum_{k \in N} (\sum_{i \in B} c_i z_{ik} - c_k) x_k = c^T \bar{x} - \sum_{k \in N} \Delta_k x_k.$$

Công thức này cho thấy (với bài toán tìm cực tiểu)

Tiêu chuẩn tối ưu: $\bar{x}$ là *lời giải tối ưu* nếu

$$\Delta_k = \sum_{i \in B} c_i z_{ik} - c_k \leqslant 0 \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

- **Dấu hiệu nhận biết bài toán có trị tối ưu vô cực** ($-\infty$ với bài toán min, $+\infty$ với bài toán max):

$\exists k \in N$ với $\Delta_k > 0$ (bài toán min) hay $\Delta_k < 0$ (bài toán max), $z_{ik} \leqslant 0 \, \forall i \in B$.

- Qui tắc **"Hình chữ nhật"** tính truy hồi các hệ số z_{ik} trong bảng đơn hình:

Giả sử biến $x_s, s \in N$, được đưa vào cơ sở thay cho biến thứ r trong B. Khi đó

$$z'_{ik} = \begin{cases} z_{ik,} - (z_{rk}/z_{rs}) z_{is}, i \neq r \\ z_{rk}/z_{rs}, \qquad i = r \end{cases}, \; i = 1, ..., m, \; k = 0, 1, ..., n$$