

ĐÔI NÉT VỀ NGÔN NGỮ TOÁN HỌC

○ THS. TRẦN NGỌC BÍCH*

Ngôn ngữ (NN) sử dụng trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu toán học bao gồm ngôn ngữ tự nhiên (NNTN) và ngôn ngữ toán học (NNTH). NNTH được nghiên cứu từ giữa thập niên 70 của thế kỉ XX. Các nghiên cứu về NNTH xuất hiện nhiều ở Anh, Úc, một số nước ở châu Âu, châu Á và Bắc Mỹ. Ở Việt Nam, một số nhà nghiên cứu như Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình, Hà Sĩ Hổ,... đã đề cập đến vấn đề NNTH; các tác giả như Nguyễn Văn Thuận, Nguyễn Hữu Hậu,... đã công bố một số bài viết mang tính chuyên khảo về vấn đề NNTH trong dạy học toán ở trường phổ thông trên các tạp chí có uy tín.

1. Quan niệm về ngôn ngữ toán học

Nhiều nhà nghiên cứu giáo dục quan niệm Toán học cũng là một NN. Các tác giả Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình quan niệm: *Toán học hiểu theo một nghĩa nào đó là một thứ NN để mô tả những tình huống cụ thể nảy sinh trong nghiên cứu khoa học hay trong hoạt động thực tiễn của loài người* (1). Còn LDiane Miller cho rằng, *Toán học là một NN bao gồm các biểu tượng để diễn đạt chính xác khái niệm cơ bản của toán học* (2). Theo O'Halloran, *Toán học là một hệ thống các kí hiệu đa dạng, gồm các biểu tượng, NN và hình ảnh trực quan* (3).

Một số nhà nghiên cứu khác cũng có quan niệm về NNTH như sau: *NNTH thực chất là những gì người học phải học để nói về ý tưởng toán học* (4). NNTH có thể được hiểu là một hệ thống các thuật ngữ, kí hiệu toán học chủ yếu ở dạng NN viết. Các kí hiệu này có tính chất quy ước để diễn đạt nội dung toán học, đảm bảo tính logic, chính xác và ngắn gọn (5).

Có thể hiểu, NNTH là một hệ thống các biểu tượng, kí hiệu, từ, cụm từ và các quy tắc kết hợp chúng dùng làm phương tiện để diễn đạt nội dung toán học một cách logic, chính xác, rõ ràng. Biểu tượng gồm hình ảnh, hình vẽ, sơ đồ hoặc mô hình của đối tượng cụ thể. Kí hiệu gồm chữ số,

chữ cái, kí tự alphabetic, các phép toán và quan hệ được dùng trong toán học.

2. Các yếu tố cơ bản của ngôn ngữ toán học

Giá trị, biến, hàm và biểu thức là những yếu tố cơ bản của NNTH (6).

- *Giá trị* (values) là nền tảng cơ sở để xây dựng NNTH. Các biểu thức toán học đều được tạo thành từ giá trị, tham chiếu từ giá trị. Khi đó, giá trị được hiểu là số đo của một đại lượng hay số đo được thay thế bằng một kí hiệu.

- *Hằng số* cũng có nghĩa là giá trị nhưng nó có thể là một biến với giá trị không đổi trong một khoảng thời gian hoặc trong một số mô hình toán học.

- *Biến* (variables) là một đại lượng có giá trị biến đổi trong quá trình được xét, là sự kết hợp giữa tên và giá trị, là chữ được sử dụng để đại diện cho các đối tượng toán học.

- *Hàm* (function) là biến mà giá trị của nó được xác định khi đã biết giá trị của một hay nhiều biến khác. Hàm còn được coi là một giá trị phụ thuộc vào giá trị khác. Các giá trị mà giá trị của hàm phụ thuộc được gọi là đối số (hay biến số) của hàm. Mỗi đối số xác định duy nhất một giá trị của hàm. Hàm có thể có đối số hoặc không có đối số. Hàm không có đối số sẽ bị hạn chế tính ứng dụng vì nó luôn cho giá trị giống nhau ở mọi thời điểm. Thông thường, một hàm có một số cố định các đối số nhưng không đúng trong tất cả các trường hợp. Thứ tự của các đối số xuất hiện trong hàm rất quan trọng vì giá trị của hàm $(x; y)$ trong một số trường hợp sẽ khác giá trị hàm $(y; x)$. Trong thực hành, cách biểu thị: tên hàm (đối số 1; đối số 2) thể hiện sự công bằng nên người ta đã thay thế bằng một kí hiệu ngắn gọn hơn. Biểu tượng duy nhất cho tên hàm được viết giữa hai dấu ngoặc đơn "tổng" được thay thế

* Khoa Giáo dục Tiểu học

đó, thay cho việc viết tổng $(3; 5)$ có giá trị là 8, ta viết $3 + 5 = 8$.

- Biểu thức là kí hiệu hoặc tổ hợp kí hiệu toán học nối liền với nhau bằng dấu các phép toán (7). Biểu thức còn được hiểu là sự kết hợp giữa các phép toán với giá trị biến và hàm, là yếu tố cao nhất trong NNTH. Một biểu thức có thể là một mệnh đề khi nó nhận các giá trị đúng hoặc sai; chẳng hạn $3 + 2 = 5$ nhận giá trị đúng, là mệnh đề toán học.

3. Đặc trưng của NNTH

NNTH mang đầy đủ đặc trưng của một NN khoa học như: tính đơn trị, tính hệ thống, tính quốc tế và tính trừu tượng.

Thứ nhất, NNTH có tính đơn trị, có nghĩa là mỗi từ, cụm từ hoặc kí hiệu chỉ có một nghĩa duy nhất, trong mọi văn cảnh khác nhau thì nghĩa của nó vẫn không thay đổi. Tính đơn trị của NNTH đã làm nên sự khác biệt giữa NNTN và NNTH. Trong NNTN, một từ có thể có nhiều nghĩa (hiện tượng đa nghĩa) còn trong NNTH, mỗi từ chỉ có một nghĩa xác định duy nhất. Chẳng hạn, từ "cạnh" trong NNTH được hiểu là đoạn làm thành phần của một đường gấp khúc hay một đa giác như: cạnh hình tam giác, cạnh hình thoi, cạnh hình bình hành,... Từ "cạnh" trong NNTN có rất nhiều nghĩa, chẳng hạn: đường rìa của một vật, cạnh bàn, cạnh ghế... Trong NNTH, các từ, kí hiệu, thuật ngữ là đơn nghĩa nên nội dung luôn được diễn đạt chính xác, ngắn gọn và rõ ràng.

Thứ hai, NNTH có tính hệ thống. Mỗi từ, cụm từ trong NNTH đều có vị trí xác định; khi tách các từ, cụm từ đó ra khỏi hệ thống thì các từ đó sẽ mang một nghĩa khác. Chẳng hạn, từ "tích" trong toán học có nghĩa là "kết quả của phép nhân" nhưng khi tách ra và sử dụng như một từ trong NNTN thì nó lại có nghĩa là "đón, góp từng ít ch...anh số lượng đáng kể". Tuy nhiên, một từ

từ có thể xuất hiện trong nhiều ngành khác nhau, nhưng trong cùng một hệ thống, cụm từ chỉ có một nghĩa duy nhất. Ví dụ, "đơn vị" trong NNTH có nghĩa là "đơn vị đo lường", nhưng trong hệ thống đơn vị đo lường quốc tế thì nó có nghĩa là "phạm vi của một đại lượng vật lý".



(1) Nguyễn Văn Ngọc, *Đặc trưng của ngôn ngữ toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1997. Đây là một phương pháp nghiên cứu mới trong toán học.

Về mặt hình thức, tính hệ thống của NNTH có sự phụ thuộc lẫn nhau. Ví dụ, tập hợp số tự nhiên kí hiệu là N và tập hợp số tự nhiên khác không kí hiệu là N' ; phép hợp của hai tập hợp kí hiệu là \cup , giao của hai tập hợp kí hiệu là \cap ; nếu $f: A \rightarrow B$ là một ánh xạ thì ánh xạ ngược của f là: $f^{-1}: B \rightarrow A$. Như vậy, tính hệ thống trong NNTH không chỉ thể hiện ở nội dung mà còn ở hình thức. Khi tách các từ, cụm từ trong NNTH ra khỏi hệ thống thì nghĩa của chúng sẽ mất đi.

Thứ ba, NNTH có tính quốc tế. Nếu như NNTN (NN Việt) chỉ mang tính địa phương, tính dân tộc thì NNTH lại mang tính quốc tế cả về hình thức và ngữ nghĩa. Đây là một đặc trưng quan trọng để phân biệt NNTH với NNTN và NN của các ngành khoa học khác. Nhờ có tính quốc tế mà các chuyên gia toán học ở các quốc gia khác nhau vẫn có thể trao đổi và cùng giải quyết các vấn đề toán học.

Thứ tư, NNTH có tính trừu tượng. Tính trừu tượng của NNTH thể hiện ở ngữ nghĩa của các kí hiệu, thuật ngữ toán học. Có những từ trong NNTH mang ý nghĩa khác với những NIN sử dụng giao tiếp hàng ngày.

Ngoài ra, NNTH không mang sắc thái tu từ biểu cảm. Đây cũng là một trong những đặc trưng khác biệt với NNTN. Cụ thể, NNTN thường sử dụng đại từ nhân xưng, nhưng trong NNTH đại từ nhân xưng không xuất hiện và các từ chỉ có duy nhất một nghĩa nên không xảy ra hiện tượng đồng nghĩa như trong NNTN.

4. Chức năng của NNTH

Trong dạy học toán, giao tiếp là một chức năng quan trọng. Có rất nhiều thông tin được trao đổi giữa giáo viên (GV) với tập thể lớp, giữa GV với HS, giữa từng HS với tập thể lớp, giữa các HS với nhau. Chất lượng học tập của HS có liên quan đến chất lượng giao tiếp với GV, bởi giao tiếp là một phương tiện để đạt tới sự hiểu biết về toán học của HS. Torble, M. Shuard cho rằng, không có NN thì không có quá trình giao tiếp, không có thông tin trao đổi thì lớp học sẽ không diễn ra. Dean cũng khẳng định, rất khó để diễn đạt các ý tưởng toán học hoàn toàn bằng NNTN, vì vậy, HS thường xuyên phải giao tiếp bằng NNTH.

Bên cạnh chức năng giao tiếp, NNTH còn có chức năng tư duy. Thật vậy, NN chính là hình thức tồn tại, là phương tiện vật chất để

biểu đạt tư duy. Do đó, có thể coi NNTH là hiện thực trực tiếp của tư tưởng toán học. Không có kí hiệu, thuật ngữ toán học nào mà lại không biểu hiện của khái niệm hoặc tư tưởng toán học. Ngược lại, không có ý nghĩ, tư tưởng nào lại không được thể hiện nhờ NNTH. Chẳng hạn, biểu thức $(64 : 4 + 2 - 4 \times 3)$, để tính được giá trị của biểu thức này, người học phải tư duy. NNTH còn là phương tiện để thực hiện quá trình tư duy, biểu đạt kết quả của tư duy. Do đó, có thể khẳng định, tư duy là cái được biểu hiện còn NNTH là sự biểu hiện kết quả của tư duy.

Một khác, NN còn là công cụ của tư duy, trực tiếp tham gia vào quá trình hình thành và phát triển tư duy. NNTH tham gia vào quá trình giải quyết các vấn đề toán học. Mọi ý nghĩ, tư tưởng toán học chỉ trở nên rõ ràng, chính xác khi được biểu đạt bằng NNTH, nếu không, ý tưởng đó sẽ còn mù mờ, chưa sáng tỏ.

5. Các bình diện nghiên cứu NNTH

Từ vựng là một khía cạnh quan trọng trong NNTH. Có thể coi: *Tập hợp các biểu tượng, kí hiệu, từ, cụm từ dùng trong toán học được gọi là từ vựng toán học.* Cú pháp (syntax): giống như NN, NNTH cũng có cú pháp riêng. Cú pháp trong NNTH có thể hiểu là các quy tắc kết hợp kí hiệu, từ, cụm từ thành biểu thức, công thức, mệnh đề... để truyền tải nội dung toán học với độ chính xác cao. Chẳng hạn, «phát biểu 3 cộng 5 bằng 8» được viết đúng cú pháp là: $3 + 5 = 8$. Trong NNTH, các kí hiệu đôi khi có thể bị ẩn đi trong các biểu thức. Ngoài ra, các liên kết logic «nếu ... thì», «khi và chỉ khi», «cần và đủ»... được sử dụng để kết nối các ý tưởng hay khái niệm toán học nhằm đảm bảo tính chặt chẽ, chính xác. Cấu trúc so sánh «lớn hơn», «nhỏ hơn» cũng được dùng để biểu thị các quan hệ toán học.

Ngữ nghĩa (semantics) trong NNTH có thể hiểu là nghĩa của biểu tượng, kí hiệu, thuật ngữ, khái niệm, tiên đề, định lí,... trong toán học. Do tính đơn trị nên các từ, cụm từ trong NNTH luôn xác định về nghĩa, vì thế, không có hiện tượng đa nghĩa. Trong một số trường hợp, các kí hiệu, biểu tượng toán học có chức năng khác nhau tùy thuộc vào ngữ cảnh. Có thể cùng một từ nhưng trong ngữ cảnh khác nhau chúng sẽ được biểu thị dưới các dạng khác nhau. Do đó, để hiểu được nghĩa

trong NNTH, người học cần nắm vững các quy tắc, kí hiệu, biểu tượng toán học.

Tóm lại, NNTH là phương tiện để diễn đạt nội dung toán học một cách logic, ngắn gọn và chính xác. NNTH mang đặc trưng của NN khoa học, có chức năng giao tiếp và chức năng tư duy; tuy có nhiều điểm khác biệt so với NNTN nhưng trong NNTH có một phần NNTN và không phải tất cả NNTN đều có ý nghĩa trong toán học. □

(1) Phạm Văn Hoàn - Nguyễn Gia Cốc - Trần Thúc Trinh. Giáo dục học môn Toán. NXB Giáo dục, H. 1981.

(2) L. Diane Miller. Making the connection with language. *The Arithmetic Teacher*; Feb 1993. Research Library.

(3) Gong Wengao - Hong Huaqing - Koh Kim Hong. Incorporating corpus linguistics into content teaching: the feasibility of using small corpus in Singapore primary Maths teaching. http://hdl.handle.net/10497/182_2005.

(4) Clare Lee - Language for Learning Mathematics - Assessment for Learning in Practice. Open University Press, 2006.

(5) Hà Sĩ Hồ. Những vấn đề cơ bản của phương pháp dạy và học toán cấp 1. NXB Giáo dục, H. 1990.

(6) Robert Laurence Baber. The Language of Mathematics. Printed in the United States of America, 2011.

(7) Hoàng Phê (chủ biên). Từ điển Tiếng Việt. NXB Đà Nẵng - Trung tâm Từ điển học, 2010.

Tài liệu tham khảo

1. Mai Ngọc Chừ (chủ biên) - Nguyễn Thị Ngân Hoa - Đỗ Việt Hùng - Bùi Minh Toán. **Nhập môn ngôn ngữ học.** NXB Giáo dục, H. 2007.

2. Nguyễn Thiện Giáp (chủ biên) - Đoàn Thiện Thuật - Nguyễn Minh Thuyết. **Dẫn luận ngôn ngữ học.** NXB Giáo dục, H. 2005.

3. Raymond Duval - Pier Luigi Ferrari - Marit Johnsen Haines - Candia Morgan. Language and mathematic. CERME 4, 2005.

SUMMARY

Mathematical language plays an important role in teaching, learning and researching mathematics. Therefore, it is necessary to master the theory on mathematical language. This article presents the fundamental issues of this language with a desire to be the theoretical basis for the process of researching and proposing methods to improve the ability to use mathematical language in teaching and learning mathematics in primary schools.