TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG ĐÌNH HƯNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG VÀ QUY NẠP TOÁN HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

TRƯỜNG ĐẠI THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG ĐÌNH HƯNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG VÀ QUY NẠP TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Logic toán là một ngành khoa học còn non trẻ ra đời từ thế kỷ 17, nhưng nó đóng vai trò quan trọng trong toán học. Nó là phương tiện để xây dựng các kiến thức toán học và là chất keo nối kết các ngành, các vấn đề toán học với nhau làm cho toán học trở thành một thể thống nhất. Logic toán rất quan trọng với các thày giáo dạy toán. Nó tạo cho người thày khả năng đi sâu vào bản chất của sự chứng minh. Nó tạo cho người thày những phương tiện mới để rèn luyện cho học sinh thói quen suy nghĩ chính xác.

Trong luận văn này tôi trình bày cơ sở logic cũng như các dạng đặc biệt của hai phương pháp chứng minh toán học quen thuộc và quan trọng: phương pháp chứng minh phản chứng và phương pháp quy nạp toán học. Cả hai phương pháp này đã được sử dụng trong chương trình nâng cao ở phổ thông, trong các bài toán thi học sinh giỏi. Điều quan trọng trọng trong phương pháp chứng minh phản chứng là tạo ra mệnh đề phủ định và tìm ra sự vô lý với giả thiết hay vô lý với kiến thức toán học đã biết. Phương pháp quy nạp toán học chứng minh các mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên dạng $\forall n P(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Để chứng minh những mệnh đề như thế hiển nhiên ta không thể thử trực tiếp với mọi số tự nhiên vì tập số tự nhiên là vô hạn. Nguyên lý cơ bản của phương pháp quy nạp toán học là chứng minh mệnh đề đúng với $n = 0$ sau đó ta chứng minh nếu mệnh đề đúng với một số tự nhiên k thì nó cũng với $k+1$. Ở đây ta theo quy ước tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên không âm: $0, 1, 2, ...$ Tuy nhiên chúng ta không hiểu tại sao chúng ta lại chứng minh như vậy. Hơn nữa trong thực tế chứng minh xuất hiện rất nhiều các dạng biến thể của hai phương pháp trên. Trong luận văn này trước hết chúng tôi giải thích cơ sở logic của các phương pháp chứng minh trên. Sau đó chúng tôi liệt kê một số dạng chứng minh đặc biệt.

Luận văn bao gồm ba chương. Chương 1 trình bày ngắn gọn những kiến thứ cơ bản của đại số mệnh đề, vị từ và tính sắp thứ tự tốt của tập các số tư nhiên làm cơ sở cho việc trình bày các chương sau. Một số khái niệm và kết quả được trình bày trong chương này nhưng không có ví dụ minh họa nhằm mục đích cho luận văn được trình bày cô đọng hơn. Chương 2 và 3 là các chương chính của luận văn. Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các dạng toán chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Với những kiến thức về đại số mệnh đề trình bày trong Chương 1 ta có thể hiểu rõ cơ sở logic của phương pháp chứng minh này. Chương 3 dành cho việc trình bày phương pháp quy nạp toán học. Để hiểu rõ phương pháp này ta cần tính sắp thứ tự tốt của tập các số tự nhiên và phương pháp chứng minh phản chứng.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Trần Nguyên An. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi cũng xin bày tỏ lời cảm ơn sâu sắc đến các thầy cô giáo của trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành khóa học này!

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2014

Tác giả

Đặng Đình Hưng

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị làm cơ sở cho việc trình bày các chương sau.

1.1. Mệnh đề và các phép toán mệnh đề

Mệnh đề là một khái niệm nguyên thuỷ của toán học. Ta có thể quan niệm mệnh đề là một câu trần thuật biểu thị một ý trọn vẹn mà ta có thể khẳng định một cách khách quan nó là "đúng" hoặc "sai". Trong Logic Toán, khi xét một mệnh đề, ta không quan tâm đến cấu trúc ngữ pháp cũng như ý nghĩa nội dung của nó, mà chỉ quan tâm đến tính đúng sai của nó mà thôi. Giá trị "đúng" hay "sai" của một mệnh đề gọi là giá trị chân lý của mệnh đề đó. Ta quy ước ký hiệu giá trị chân lý "đúng" bằng số 1, giá trị "sai" bằng số 0.

Một mệnh đề mà không một bộ phận thực sự nào của nó cũng là mệnh đề, gọi là *mệnh đề đơn giản*. Ta ký hiệu các mệnh đề đơn giản bằng các chữ cái la tinh nhỏ (có thể với các chỉ số): $a, b, c, ..., p, q, r, a_1, a_2, ...$. Đây là các biến lấy giá trị 1 hoặc 0 khi ta thay chúng bằng các mệnh đề cụ thể. Vì vậy ta gọi chúng là các *biến mệnh đề*.

Từ các mệnh đề đơn giản nhờ các *liên kết lôgic*, cũng gọi là các *phép toán logic* ta lập được các mệnh đề *phức hợp*. Sau đây là một số phép toán logic cơ bản.

Định nghĩa 1.1.1 (Phép phủ định)**.** *Giả sử a là mệnh đề. Phủ định của a là một mệnh đề, ký hiệu $\overline{a}$ (hoặc $\neg a$), là một mệnh đề đúng khi a là một mệnh đề sai và là một mệnh đề sai khi a là mệnh đề đúng.*

Ta có thể mô tả định nghĩa trên bằng bảng sau, gọi là *bảng giá trị* *chân lý* của phép toán.

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Định nghĩa 1.1.2 (Phép hội)**.** *Giả sử a và b là các mệnh đề. Hội của chúng, ký hiệu là $a \wedge b$, là một mệnh đề đúng khi a và b đều đúng, và là một mệnh đề sai trong các trường hợp còn lại.*

Định nghĩa 1.1.3 (Phép tuyển)**.** *Giả sử a và b là các mệnh đề. Tuyển của chúng ký hiệu là $a \vee b$, là một mệnh đề sai khi a và b đều sai, và là một mệnh đề đúng trong các trường hợp còn lại.*

Định nghĩa 1.1.4 (Phép kéo theo)**.** *Giả sử a và b là các mệnh đề. a kéo theo b là một mệnh đề, ký hiệu $a \to b$, là một mệnh đề sai khi a đúng b sai và là một mệnh đề đúng trong các trường hợp còn lại.*

Định nghĩa 1.1.5 (Phép tương đương)**.** *Giả sử a và b là các mệnh đề. a tương đương b là một mệnh đề, ký hiệu là $a \leftrightarrow b$, là một mệnh đề đúng khi a và b cùng đúng hoặc cùng sai và là một mệnh đề sai trong các trường hợp còn lại.*

Ta có bảng giá trị chân lý của các phép toán hội, tuyển, kéo theo và tương đương như sau.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Chú ý: Trong mệnh đề $a \to b$, a được gọi là tiền đề hay giả thiết, b gọi là kết luận. Mệnh đề $a \to b$ được gọi là mệnh đề thuận, mệnh đề $b \to a$ được gọi là mệnh đề đảo, mệnh đề $\overline{a} \to \overline{b}$ được gọi là mệnh đề phản còn mệnh đề $\overline{b} \to \overline{a}$ được gọi là mệnh đề phản đảo của mệnh đề $a \to b$. Ta có thể thấy được giá trị chân lý của các mệnh đề thuận, đảo, phản và phản đảo qua bảng chân lý sau

a	b	$a \to b$	$b \to a$	$\overline{a} \to \overline{b}$	$\overline{b} \to \overline{a}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Theo bảng giá trị chân lý mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo; mệnh đề đảo và mệnh đề phản luôn có cùng giá trị chân lý với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần a, b.

1.2. Công thức mệnh đề

Nhờ các phép toán logic từ các mệnh đề đơn giản ta có thể thành lập được những mệnh đề mới, ngày càng phức tạp hơn, bằng cách thực hiện trên các mệnh đề đã cho một số hữu hạn tuỳ ý những phép toán logic. Các mệnh đề thành lập theo cách ấy gọi là công thức của đại số mệnh đề. Để định nghĩa một cách chính xác khái niệm này, ta xuất phát từ một tập hợp ký hiệu cơ bản gọi là bảng chữ cái. Bảng chữ cái trong Đại số mệnh đề bao gồm:

(i) $0, 1$ là ký hiệu các mệnh đề sai, tương ứng đúng. Ta gọi chúng là các *hằng*.

(ii) Các chữ cái la tinh nhỏ $a, b, c, ...$ là ký hiệu của các biến mệnh đề.

(iii) $-, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ là ký hiệu của các phép toán logic và $($, $)$ là dấu ngoặc.

Định nghĩa 1.2.1. *Một dãy hữu hạn tuỳ ý những ký hiệu trong bảng chữ cái được gọi là một từ trên bảng chữ cái đó. Ta ký hiệu các từ bằng các chữ cái la tinh lớn $A, B, C, P, Q, ...$ Trong lớp tất cả các từ, ta xét lớp từ gọi là công thức và được định nghĩa bằng quy nạp như sau:*

(i) Các hằng, các biến mệnh đề là những công thức.

(ii) Nếu A là một công thức thì $(\overline{A})$ là một công thức.

(iii) Nếu A và B là những công thức thì $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, ... là những công thức.

(iv) Mọi từ khác không được thành lập theo các quy tắc (i), (ii), (iii) thì không phải là công thức.

Công thức A chứa các biến mệnh đề $a_1, a_2, ..., a_n$ thường được ký hiệu là

$$A = A(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Giả sử $A = A(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một công thức mệnh đề phụ thuộc n biến mệnh đề $a_1, a_2, ..., a_n$. Đặt $I = \{0, 1\}$ là tập các giá trị chân lý của các mệnh đề. Dãy $e = (e_1, e_2, ..., e_n) \in I^n$ được gọi là một *dãy giá trị chân lý (dãy giá trị)* cho tương ứng với các biến mệnh đề $a_1, a_2, ..., a_n$ trong công thức A.

Giá trị chân lý của A tại e, ký hiệu $A|_e$ và được định nghĩa như sau:

(i) Nếu A là một biến mệnh đề a_i thì $A|_e = e_i$.

(ii) Nếu A có dạng $\overline{B}$, trong đó B là một công thức và nếu $B|_e$ đã được xác định thì

$$A|_e = \begin{cases} 0 \text{ nếu } B|_e = 1 \\ 1 \text{ nếu } B|_e = 0. \end{cases}$$

(iii) Nếu A là một trong các dạng $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \to C$, $B \leftrightarrow C$, trong đó B và C là những công thức, $B|_e$, $C|_e$ đã được xác định thì $A|_e$ cũng được xác định và việc xác định giá trị của A trên e phù hợp với định nghĩa của các phép toán $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Cụ thể ta có bảng giá trị chân lý tương ứng sau

$B\|_e$	$C\|_e$	$(B \wedge C)\|_e$	$(B \vee C)\|_e$	$(B \to C)\|_e$	$(B \leftrightarrow C)\|_e$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Giả $A = A(a_1, a_2, ..., a_n)$ là công thức mệnh đề phụ thuộc n biến. Tập

$$E_A = \{e \in I^n \mid A|_e = 1\} \subseteq I^n$$

được gọi là *miền đúng* của công thức A.

Định nghĩa 1.2.2. *Một công thức A được gọi là hằng đúng nếu nó nhận giá trị 1 trên mọi dãy giá trị của các biến mệnh đề có mặt trong công thức A, tức là $A|_e = 1$ trên mọi dãy giá trị e của A.*

Nếu A là một công thức hằng đúng thì ta viết $\models A$. Các công thức hằng đúng đóng một vai trò rất quan trọng trong logic. Chúng là những *luật logic*.

Định nghĩa 1.2.3. *Giả sử A, B là hai công thức. Ta nói A và B là tương đương logic nếu chúng có cùng giá trị trên mọi dãy giá trị của các biến mệnh đề, tức là $A|_e = B|_e$ trên mọi dãy giá trị e của A và B. Ta ký hiệu hai công thức tương đương logic là $A \Leftrightarrow B$ (hoặc $A \equiv B$).*

Ví dụ 1.2.4. *(i) $A = a \wedge \overline{a}$ là công thức hằng đúng.*

(ii) $a \to b \Leftrightarrow \overline{a} \vee b$.

(iii) $a \to b \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b) \wedge (c \vee \overline{c})$.

Nhận xét:(i) Quan hệ tương đương logic giữa các công thức là quan hệ tương đương trên tập các công thức của đại số mệnh đề.

(ii) Giả sử A, B là hai công thức. Khi đó $A \Leftrightarrow B$ nếu và chỉ nếu $\models (A \leftrightarrow B)$.

Bằng cách lập bảng giá trị chân lý ta có thể chứng minh một số công thức là tương đương logic.

1.3. Hệ quả logic và quy tắc suy luận

Định nghĩa 1.3.1. *(i) Giả sử A và B là hai công thức. Công thức B được gọi là hệ quả logic (hay hệ quả) của công thức A, ký hiệu $A \Rightarrow B$ (hoặc $A \models B$) nếu với mọi dãy giá trị e của các biến mệnh đề có mặt trong A và B, mỗi khi $A|_e = 1$ thì $B|_e = 1$. Khi đó ta cũng nói có một quy tắc suy luận từ tiền đề (hay giả thiết) A đến kết luận (hay hệ quả) B, quy tắc suy luận đó được ký hiệu bởi*

$$\frac{A}{B}.$$

(ii) Giả sử $\Delta = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ là một dãy hữu hạn những công thức. Công thức B được gọi là hệ quả logic (hay hệ quả) của Δ, ký hiệu $\Delta \Rightarrow B$ (ta còn viết $\Delta \models B$, hay $A_1, A_2, ..., A_m \Rightarrow B$), nếu B là hệ quả logic của công thức $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m$. Khi đó ta cũng nói có một quy tắc suy luận từ các tiền đề (hay các giả thiết $A_1, A_2, ..., A_m$ đến kết luận (hay hệ quả) B, quy tắc suy luận đó được ký hiệu bởi

$$\frac{\Delta}{B} \text{ hoặc } \frac{A_1, ..., A_m}{B}.$$

Nhận xét. (i) Giả sử A, B là các công thức. Khi đó B là hệ quả logic của A khi và chỉ khi $E_A \subseteq E_B$.

(ii) B là hệ quả logic của A hay ta có quy tắc suy luận $\dfrac{A}{B}$ khi và chỉ khi $A \to B$ là hằng đúng.

1.4. Đại số vị từ

Logic vị từ là sự phát triển của Đại số Mệnh đề. Nó chứa trong bản thân nó toàn bộ Đại số Mệnh đề, nghĩa là các mệnh đề đơn giản, các phép toán logic và do đó tất cả các công thức của Đại số Mệnh đề.