ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ NGẠN

DƯỚI VI PHÂN HÀM VÉCTƠ LỒI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ NGẠN

DƯỚI VI PHÂN HÀM VÉCTƠ LỒI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 12 năm 2015

Học viên

Đặng Thị Ngạn

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Em muốn gửi tới thầy lời biết ơn sâu sắc nhất. Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy, các cô của Trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên, gia đình tôi và các bạn lớp cao học toán K7Y đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học cao học và thực hiện bản luận văn này. Trong quá trình viết luận văn không tránh khỏi sai sót rất mong được sự góp ý chân thành của độc giả.

Thái Nguyên, 2015 **Đặng Thị Ngạn**

Học viên Cao học Toán K7Y,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Những nền móng của giải tích lồi đã được xây dựng trong khoảng cuối thế kỷ XX bởi nhiều nhà toán học, trong đó đầu tiên phải kể đến là Minkowski, Rockafellar. Từ đó đến nay, với sự đóng góp qua từng thời kỳ của các nhà toán học như Bonneesen, Fenchel, Beckenbach, Valentine, Tucker, Bourbaki, Moreau, ..., giải tích lồi đã đạt đến một sự phát triển mạnh mẽ. Tầm quan trọng của giải tích lồi thể hiện ở những ứng dụng rộng rãi của nó trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, đặc biệt là trong lý thuyết tối ưu mà ở đó các bài toán với giả thiết lồi.

Bài toán tối ưu thông thường, bài toán tối ưu vectơ cũng đã được đặt ra từ khá lâu. Bài toán tối ưu vectơ có nguồn gốc từ các bài toán làm quyết định mà hằng ngày người ta gặp phải trong quản lý, sản xuất, kinh doanh, thiết kế, hành chính, văn phòng.... Là một chuyên ngành của toán học, tối ưu véctơ được manh nha trong khoảng đầu thế kỷ này từ các công trình về lý thuyết cân bằng kinh tế của Edgeworth, khái niệm hữu hiệu của Pereto cùng với các cơ sở toán học của không gian thứ tự do Cantor và Hausdorff đề xướng. Tuy nhiên phải đợi đến năm năm mươi, sau khi Kubn-Tucker đăng công trình về điều kiện cần và đủ của hữu hiệu, Debreu đăng công trình về cân bằng đánh giá và tối ưu Pareto, thì tối ưu vectơ mới có những bước phát triển mạnh mẽ, đặt biệt trong ba mươi năm trở lại đây, về cả mặt lý thuyết và ứng dụng. Tuy nhiên có một điều đáng ghi nhận là trong số các công trình đã được đăng và xuất bản về chuyên ngành tối ưu véctơ, thì lĩnh vực ứng dụng đã thu hút được sự quan tâm của các tác giả nhiều hơn hẳn so với lĩnh vực lý thuyết. Nhiều tác giả nghiên cứu và đã thu được những thành công nhất định. Các nghiên cứu về các hàm vectơ lồi chưa có được sự sâu sắc toàn diện, hệ thông như trường hợp vô hướng. Do đó nhiều kết quả đẹp, hữu ích trong giải tích lồi chưa được mở rộng sang cho trường hợp vectơ cũng như những ứng dụng của các hàm đó trong bài toán véctơ còn hạn chế.

Trong lý thuyết tối ưu, người ta phân ra tối ưu trơn và không trơn. Đối với các bài toán tối ưu trơn, ta có thể tìm được điều kiện cần và đủ thông qua các đạo hàm cấp 1,2,.... Từ đó, ta có thể xây dựng được những thuật toán tìm nghiệm một cách tương đối thuận lợi dựa trên phương pháp Newton. Đối với các bài toán tối ưu không trơn, ta gặp nhiều khó khăn hơn trong việc tìm các điều kiện cần và đủ tối ưu. Đối với qui hoạch tuyến tính, năm 1947 Danzig đã tìm ra thuật toán đơn hình để giải ra nghiệm. Những năm 1960, nhà toán học Mỹ Rockafellar [6] đã đưa ra khái niệm dưới vi phân hàm lồi. Dựa trên khái niệm này ông đã tìm được các điều kiện cần và đủ cho bài toán qui hoạch lồi và từ đó xây dựng được thuật toán để giải. Tiếp theo, đối với bài toán qui hoạch Lipschitz, những năm 1970, 1980, nhà toán học Mỹ, Clarke đưa ra khái niệm dưới vi phân hàm Lipschitz địa phương và tìm ra phương pháp giải bài toán này. Tiếp sau đó, nhiều người cũng đã tìm ra nhiều khái niệm dưới vi phân khác để giải các bài toán tối ưu không trơn cho trường hợp vô hướng và cả trường hợp vectơ, như Penot, Strodiot, Nguyen Van Hien, Jeykumar và Dinh The Luc [5],... Ý tưởng chung của các dưới vi phân này là, xấp xỉ hàm tại mọi điểm bằng một tập hợp thay vì một phân tử như trường hợp hàm khả vi. Những khái niệm này đã được nhiều người mở rộng cho trường hợp vectơ. Với mong muốn tìm hiểu sâu về vấn đề này, tôi đã chọn đề tài **"dưới vi phân hàm lồi vectơ và ứng dụng "**. Nội dung chủ yếu của luận văn là nghiên cứu, tìm hiểu về tính chất của dưới vi phân hàm vectơ lồi và giới thiệu một số ứng dụng của nó vào tối ưu hóa.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, Luận văn bố cục gồm hai chương

Chương 1: Một số vấn đề cơ bản của giải tích lồi. Trình bày những khái niệm cơ bản của giải tích lồi, những tính chất quan trọng của tập lồi, tập affine, hàm lồi, và liên tục, tính Lipschitz địa phương của hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi.

Chương 2: Hàm vectơ lồi và Dưới vi phân của hàm lồi véctơ lồi. Định nghĩa hàm véctơ lồi dựa trên thứ tự sinh bởi nón, định nghĩa khái niệm dưới vi phân của hàm vectơ lồi và đưa ra những tính chất cơ bản của nó. Tìm một số mối liên quan giữa dưới vi phân của hàm vectơ lồi và tính đơn điệu của đạo hàm trong trường hợp hàm khả vi. Ứng dụng dưới vi phân hàm vectơ lồi vào bài toán tối ưu. Trình bày khái niệm tổng quát về bài toán tối ưu, điều kiện để có một bài toán có lời giải tối ưu và một số bài toán tối ưu.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 12 năm 2015

Đặng Thị Ngạn

Học viên Cao học Toán lớp Y, khóa 01/2014-1/2016

Chuyên ngành Toán ứng dụng

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Email: `dangthingan1983@gmail.com`

Chương 1

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH LỒI

Chương này được viết dựa trên cuốn sách *Lý thuyết tối ưu không trơn* của Nguyễn Xuân Tấn và Nguyễn Bá Minh [2]. Phần lớn các chứng minh các kết quả trong luận văn này chúng tôi không trình bày ở đây. Người đọc có thể tìm trong cuốn sách nói trên.

Các kết quả trong luận văn này vẫn đúng trong không gian vô hạn chiều. Để trực quan cho người đọc và dễ trình bày, chúng tôi chỉ trình bày trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$.

1.1 Tập lồi

Tập lồi là một khái niệm cơ bản của giải tích lồi. Một số tập lồi mà chúng ta đã thấy nhiều như đường thẳng, đoạn thẳng, đường tròn, tam giác... Dưới đây tác giả trình bày đinh nghĩa và một số tính chất của tập lồi.

1.1.1 Tập lồi

Định nghĩa 1.1. Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, đường thẳng nối 2 điểm x_1, x_2 trong là tập hợp các véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa 1.2. Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, đoạn thẳng nối 2 điểm x_1, x_2 trong là tập hợp các véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$[x_1, x_2] := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \forall \lambda \in [0,1]\}.$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản của giải tích lồi được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.3. Tập $C \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua 2 điểm bất kỳ của nó. Tức là, C là tập lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ví dụ 1.1. a) Các tập A, B, C sau đây là các tập lồi

$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \forall \lambda \in [0,1]\}.$

$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1; -x + y \leq 1; y \geq 0\}.$

$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}.$

b) Tập sau đây không phải là tập lồi

$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2, \|x\| \geq 1\}.$

Mệnh đề 1.1.

i) Giả sử $A_i, i \in I$. Khi đó tập $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ cũng là một tập lồi.