ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ TUYẾT MAI

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ QUÁN TÍNH CỦA TSENG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG LỒI VÀ KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ TUYẾT MAI

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ QUÁN TÍNH CỦA TSENG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG LỒI VÀ KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, phó giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015

Học viên

Đặng Thị Tuyết Mai

Danh sách ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
$\mathbb{N}$	tập hợp các số nguyên không âm
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}_{++}$	tập hợp các số thực dương
E	ma trận thực $n \times n$
KL	Kurdyka-Lojasiewicz
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|\cdot\|$	chuẩn sinh bởi tích vô hướng
dom f	miền hữu dụng của hàm f
Fix T	tập các điểm bất động của toán tử T
prox_f	toán tử gần kề của hàm f
$\Gamma_0(H)$	họ tất cả các hàm lồi f nửa liên tục dưới từ H đến $(-\infty, +\infty]$
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x
crit f	tập tất cả (giới hạn) các điểm kì dị của f
dist (x, E)	khoảng cách điểm x đến tập E
D_u	khoảng cách Bregman của hàm $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Mở đầu

Bài toán tối ưu là bài toán tìm một phương án chấp nhận được để làm cực trị một hàm số hoặc một hàm véc tơ. Đây là bài toán có nhiều ứng dụng trong thực tế. Khó khăn chính trong việc nghiên cứu và giải quyết bài toán này là phải tìm được một phương án tối ưu trong miền chấp nhận được. Để giải quyết khó khăn này, phương pháp điểm gần kề quán tính là một cách tiếp cận cơ bản để giải quyết bài toán tối ưu không lồi và không trơn.

Trong luận văn chúng tôi xét bài toán tối ưu dưới dạng sau

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^m} [f(x) + h(x)].$$

Khi xét về tính lồi, cụ thể là khi f và h là hàm lồi, có rất nhiều lược đồ tính số phân tách loại gần kề có thể sử dụng để giải bài toán trên. Lưu ý ở đây loại thuật toán tiến-lùi [3] và thuật toán tiến-lùi-tiến [4] đây là một cải tiến của thuật toán tiến-lùi với điều kiện sử dụng độ lớn của các bước loại Nesterov.

Các thuật toán tách áp dụng cho các hàm f và h ở đây được áp dụng cho lược đồ lặp riêng biệt. Chính xác hơn, bước tiến áp dụng cho hàm trơn qua gradient còn bước lùi thì áp dụng cho hàm không trơn qua việc sử dụng toán tử gần kề. Thuật toán được nói ở trên đã được ứng dụng khi giải các bài toán thực tế xuất hiện trong các lĩnh vực như xử lí hình ảnh và một số vấn đề khác trong kĩ thuật. Các sơ đồ lặp này có nguồn gốc trong việc rời rạc hóa theo thời gian của bao hàm thức vi phân bậc hai và nhìn chung các bước lặp mới được xác định bởi việc dùng hai bước lặp trước nó. Thuật toán này trong vòng mười lăm năm gần đây càng ngày càng được xét rất nhiều trong các bài báo [4].

Việc mở rộng sự hội tụ của thuật toán loại gần kề đến tập hợp không lồi là một vấn đề đầy thách thức. Bằng cách giả thiết là các hàm mục tiêu có một số tính chất giải tích và sử dụng kết quả không trơn được xét bởi tính chất Kurdyka-Lojasiewicz cho các hàm trơn, lược đồ tiến-lùi cho giải bài toán này đã được chứng minh có tính chất hội tụ tốt ngay cả trong trường hợp không lồi [4].

Mục đích của đề tài luận văn là nghiên cứu kết quả mới đây trong [4] về phương pháp điểm gần kề quán tính cho bài toán tối ưu không lồi và không trơn trong không gian hữu hạn chiều.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: **Một số vấn đề cơ bản**. Trong chương này trình bày một số khái niệm, định lí, tính chất của một số hàm nhiều biến như: Hàm lồi, hàm nửa liên tục, KL hàm. Khái niệm dưới vi phân hàm lồi, dưới vi phân Fréchet. Các khái niệm về đạo hàm khả vi, hàm khoảng cách đến một điểm, khoảng cách Bregman. Giới thiệu thuật toán điểm gần kề quán tính cho hàm lồi.

Chương 2: **Phương pháp điểm gần kề quán tính cho bài toán tối ưu không lồi và không trơn**. Chương này trình bày hai loại thuật toán: thuật toán tiến-lùi và thuật toán tiến-lùi-tiến loại Tseng.

Thông qua việc hoàn thành luận văn, tác giả nhận thấy rằng các vấn đề được đề cập trong luận văn là rất rộng lớn mà trong khuôn khổ của luận văn chỉ thể hiện được một phần nào. Tuy nhiên những vấn đề được trình bày trong luận văn sẽ là những kiến thức khởi đầu định hướng cho tác giả tiếp cận các vấn đề sau này. Mặc dù tác giả đã cố gắng hết sức thực hiện luận văn, nhưng với trình độ hạn chế cùng nhiều lý do khác, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong sự góp ý của các thầy cô, các bạn và các anh chị đồng nghiệp để luận văn này hoàn chỉnh hơn.

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Trong chương này tác giả trình bày một số khái niệm, định lí, tính chất của một số hàm như: Hàm lồi, hàm nửa liên tục, KL hàm. Dưới vi phân mở rộng, dưới vi phân Fréchet. Các khái niệm về đạo hàm khả vi của hàm lồi, hàm khoảng cách đến một điểm, khoảng cách Bregman. Giới thiệu thuật toán điểm gần kề quán tính cho hàm lồi. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2], [3] và [4].

1.1 Hàm nhiều biến

Trước hết tác giả trình bày một số khái niệm, tính chất quan trọng của hàm lồi. Đây là một kiến thức chuẩn bị rất cần thiết xuyên suốt toàn bộ luận văn.

Định nghĩa 1.1. Hàm $f\colon S \to [-\infty, +\infty]$ xác định trên một tập hợp lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *hàm lồi* trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S$ và mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$ ta có:

$$f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Khi vế phải được xác định, nghĩa là hệ thức trên cần được thỏa mãn trừ khi $f(x^1) = -f(x^2) = \pm\infty$ (vì biểu thức $+\infty, -\infty$ không có nghĩa).

Hàm f được gọi là *lồi chặt* trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S, x^1 \neq x^2$ và mọi số thực $\lambda \in (0,1)$ ta có:

$$f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) < (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Hiển nhiên, hàm lồi chặt là hàm lồi, nhưng điều ngược lại không đúng.

Định nghĩa 1.2. Cho hàm bất kì $f\colon S \to [-\infty, +\infty]$ với $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Các tập: $\operatorname{dom} f = \{x \in S\colon f(x) < +\infty\}, \operatorname{epi} f = \{(x,\alpha) \in S \times \mathbb{R}\colon f(x) \le \alpha\}$ được gọi lần lượt là *miền hữu dụng, tập trên đồ thị* của hàm f. Nếu $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ (f không đồng nhất bằng $+\infty$) và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in S$ thì ta nói hàm f là *chính thường* (proper). Nói cách khác, f chính thường nếu $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ và f hữu hạn trên $\operatorname{dom} f$.

Có thể chứng minh rằng hàm f lồi trên S khi và chỉ khi

a) tập trên đồ thị $\operatorname{epi} f$ là một tập lồi, hoặc

b) $f(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x^k) \le \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f(x^k)$ với mọi $x^k \in S, \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$ và $\lambda_k \ge 0$ với mọi k trong đó m là số nguyên $m \ge 2$ (bất đẳng thức Jensen).

Hàm lồi $f\colon S \to [-\infty, +\infty]$ có thể mở rộng thành hàm lồi xác định trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$ bằng cách đặt $f(x) = +\infty$ với mọi $x \neq S$. Vì vậy, để đơn giản ta thường xét hàm lồi trên toàn $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.1. Các hàm sau đây là hàm lồi:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ với a, b là số thực.

Thật vậy, với bất kì $a, b \in \mathbb{R}; x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in (0,1)$ ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b = \lambda(ax+b) + (1-\lambda)(ay+b),$$

thỏa mãn định nghĩa của hàm lồi.

b) Ánh xạ chuẩn $\|\cdot\| : X^n \to \mathbb{R}$ và X là một không gian tuyến tính định chuẩn thực.