ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THU THỦY

VỀ PHÉP TOÁN ĐẠO HÀM TRÊN TẬP SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THU THỦY

VỀ PHÉP TOÁN ĐẠO HÀM TRÊN TẬP SỐ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn **ii**

Mở đầu **1**

1 Đạo hàm của số tự nhiên **2**

1.1 Đạo hàm của một số tự nhiên 2

1.2 Phương trình $n' = n$ 6

1.3 Phương trình $n' = a$ 8

1.4 Phương trình $n'' = 1$ 14

2 Đạo hàm của số nguyên và mở rộng **16**

2.1 Đạo hàm của số hữu tỷ 16

2.2 Nghiệm hữu tỷ của phương trình $x' = a$ 18

2.3 Đạo hàm loga 20

2.4 Đạo hàm của số vô tỷ 23

2.5 Đạo hàm số học cho UFD 26

2.6 Đạo hàm suy rộng 27

2.7 Hàm sinh 31

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với GS.TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong Khoa Toán - Tin, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 2015 **Đỗ Thu Thủy**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Khi thiết lập những tương tự giữa đa thức và số nguyên, người ta nhận thấy rằng khó khăn lớn nhất là đối với các số nguyên, không có một khái niệm đạo hàm như với đa thức. Vì thế, có nhiều cố gắng khác nhau nhằm xây dựng khái niệm đạo hàm trong tập hợp số nguyên.

Dĩ nhiên bất kỳ khái niệm đạo hàm nào cũng cần phải thoả mãn một số tính chất cơ bản, như công thức Leibnitz, hay nghiệm của một số phương trình vi phân đơn giản nhất. Luận văn nhằm trình bày một kết quả trong những cố gắng xây dựng khái niệm đạo hàm cho tập hợp số nguyên.

Luận văn được chia thành 2 chương với nội dung chính như sau:

Chương 1 trình bày khái niệm, tính chất của đạo hàm của một số tự nhiên và giải một số phương trình vi phân đơn giản.

Chương 2 mở rộng khái niệm đạo hàm cho một số nguyên, số hữu tỷ, số vô tỷ và số thực tùy ý.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Đỗ Thu Thủy

Email: huanthuyloi@gmail.com

Chương 1

Đạo hàm của số tự nhiên

Trong chương này, ta định nghĩa đạo hàm của một số nguyên là một ánh xạ biến mọi số nguyên tố thành 1 và thỏa mãn Quy tắc Leibnitz. Mục đích chính của chương là xem xét các tính chất cơ bản của ánh xạ trên và chỉ ra cách tổng quát hóa khái niệm đạo hàm cho trường hợp số hữu tỉ và số thực tùy ý. Ở đây, chúng tôi giới thiệu một số phỏng đoán, tìm mối liên hệ với phỏng đoán của Goldbach và phỏng đoán về cặp nguyên tố sánh đôi. Cuối cùng là giải một số phương trình vi phân đơn giản và tính hàm sinh.

1.1 Đạo hàm của một số tự nhiên

Định nghĩa 1.1.1. Đạo hàm của một số tự nhiên được định nghĩa như sau:

- $p' = 1$ với số nguyên tố p bất kỳ,
- $(ab)' = a'b + ab'$ với bất kì $a, b \in \mathbb{N}$ (Quy tắc Leibnitz).

Ví dụ 1.1.1. Ta có $6' = (2.3)' = 2'.3 + 2.3' = 1.3 + 2.1 = 5.$

Dưới đây là danh sách của 18 số nguyên dương và đạo hàm bậc nhất, bậc hai, bậc ba của chúng:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n'	0	1	1	4	1	5	1	12	6	7	1	16	1	9	8	32	1	21
n''	0	0	0	4	0	1	0	16	5	1	0	32	0	6	12	80	0	10
n'''	0	0	0	4	0	0	0	32	1	0	0	80	0	5	16	176	0	7

Định lí 1.1.1. *a)* $1' = 0$, *b)* $0' = 0$.

Chứng minh. a) Sử dụng Quy tắc Leibnitz, ta có

$$1 = 1^2 \Rightarrow 1' = (1^2)' \Leftrightarrow 1' = 1.1' + 1'.1 \Leftrightarrow 1' = 2.1' \Rightarrow 1' = 0.$$

b) Tương tự, theo Quy tắc Leibnitz ta có

$$0 = 2.0 \Rightarrow 0' = 2'.0 + 2.0' \Leftrightarrow 0' = 2.0' \Rightarrow 0' = 0.$$

□

Định lí 1.1.2. *Cho n là một số tự nhiên bất kỳ. Khi đó, nếu $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ thì*

$$n' = n \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{p_i}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta viết $n = \prod_{i=1}^{m} p_i$, trong đó p_i không cần thiết phải khác nhau. Ta chứng minh bằng quy nạp trên m rằng nếu $n = \prod_{i=1}^{m} p_i$ thì $n' = n \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}$. Thật vậy, khi $m = 1$ thì n là số nguyên tố và do đó $n' = 1$. Giả sử phát biểu đúng với bất kỳ $k = m \in \mathbb{N}$, tức là nếu $n = \prod_{i=1}^{m} p_i$ thì $n' = n \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}$. Khi đó, ta có

$$(np_{m+1})' = n'p_{m+1} + n(p_{m+1})'$$

$$= n + np_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}$$

$$= np_{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{p_i}.$$

Từ đó, suy ra nếu $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ thì $n' = n\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{p_i}$. □

Ví dụ 1.1.2. Ta có $(60)' = (2^2.3.5)' = 60.\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = 92.$

Chú ý rằng tính chất tuyến tính không đúng trong trường hợp tổng quát: Với nhiều cặp số a, b, ta có $(a+b)' \neq a' + b'$. Hơn nữa $(ab)'' \neq a'' + 2ab + b''$ vì ta cần tính chất tuyến tính để chứng minh điều này. Sẽ rất hay nếu ta mô tả được tất cả các cặp (a, b) là nghiệm của phương trình vi phân $(a+b)' = a'+b'$. Ta có thể tìm được một nghiệm trong bảng trên đó là $(4, 8)$. Nghiệm này có thể thu được từ nghiệm $(1, 2)$ bằng cách sử dụng kết quả sau:

Định lí 1.1.3. *Nếu $(a+b)' = a' + b'$ thì với k là một số tự nhiên bất kì, ta có*

$$(ka + kb)' = (ka)' + (kb)'.$$

Điều này cũng đúng đối với bất đẳng thức

$$(a+b)' \geq a' + b' \Rightarrow (ka+kb)' \geq (ka)' + (kb)',$$

$$(a+b)' \leq a' + b' \Rightarrow (ka+kb)' \leq (ka)' + (kb)'.$$

Hơn nữa, có thể mở rộng cho một tổ hợp tuyến tính, chẳng hạn:

$$\left(\sum \gamma_i a_i\right)' = \sum \gamma_i (a_i)' \Rightarrow \left(k\sum \gamma_i a_i\right)' = \sum \gamma_i (ka_i)'.$$

Chứng minh. Cách chứng minh cho tất cả các trường hợp đều giống nhau, vì vậy ta chỉ cần xét cách chứng minh cho một trường hợp, ví dụ trường hợp $\geq$ với hai số hạng:

$$\begin{aligned}(ka+kb)' = (k(a+b))' &= k'(a+b) + k(a+b)' \\ &= k'a + k'b + k(a+b)' \\ &\geq k'a + k'b + k(a'+b') \\ &= k'a + ka' + kb' + k'b \\ &= (ka)' + (kb)'.\end{aligned}$$

□

Hệ quả 1.1.1.

$$(3k)' = k' + (2k)'; \qquad (2k)' \geq 2k';$$
$$(5k)' \leq (2k)' + (3k)'; \qquad (5k)' = (2k)' + 3(k)'.$$

Chứng minh. Vì $1' + 2' = 0 + 1 = 1$ và $3' = 1$ nên $3' = 1' + 2'$. Theo Định lý 1.1.3 suy ra

$$(3k)' = (1k + 2k)' = (1k)' + (2k)'.$$

Tương tự, ta có

$$2' \geq 1' + 1'; \quad 5' \leq 2' + 3'; \quad 5' = 2' + 3.1'.$$

Suy ra

$$(2k)' \geq 2k'; \quad (5k)' \leq (2k)' + (3k)'; \quad (5k)' = (2k)' + 3(k)'.$$

Hệ quả được chứng minh. □

Dưới đây là danh sách của các cặp (a, b) với $a \leq b \leq 100, \ \gcd(a, b) = 1$ thỏa mãn $(a+b)' = a' + b'$:

$$(1,2), \quad (4,35), \quad (4,91), \quad (8,85), \quad (11,14), \quad (18,67), \quad (26,29)$$

$$(27,55),\quad (35,81),\quad (38,47),\quad (38,83),\quad (50,79),\quad (62,83),\quad (95,99)$$

Định lí 1.1.4. *Với số tự nhiên $k > 1$ bất kì,*

$$n' \geq n \Rightarrow (kn)' \geq kn.$$

Chứng minh. Ta có $(kn)' = k'n + kn' > kn' \geq kn$. Điều phải chứng minh. □

1.2 Phương trình $n' = n$

Tiếp theo chúng ta giải một số phương trình vi phân đơn giản đối với số nguyên dương. Đầu tiên là phương trình $n' = n$ và trong phần này ta sẽ chứng minh rằng phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $n = p^p$, trong đó p là số nguyên tố.

Định lí 1.2.1. *Nếu $n = p^p.m$ với p là số nguyên tố và $m > 1$ là số tự nhiên thì $n' = p^p(m + m')$ và $\lim\limits_{k\to\infty} n^{(k)} = \infty$.*

Chứng minh. Theo Quy tắc Leibnitz và (1.1), ta có $n' = (p^p)'.m + p^p.m' = p^p(m + m') > n$ và bằng quy nạp thì $n^{(k)} \geq n + k$. □

Định lí 1.2.2. *Cho p^k là lũy thừa cao nhất của số nguyên tố p mà chia hết số tự nhiên n. Nếu $0 < k < p$ thì p^{k-1} là lũy thừa cao nhất của p mà chia hết n'. Đặc biệt, các số $n, n', n'', \ldots, n^{(k)}$ là khác nhau.*

Chứng minh. Đặt $n = p^k m$. Khi đó $n' = kp^{k-1}m + p^k m' = p^{k-1}(km + pm')$ và vì $k < p$ nên $km + pm'$ không chia hết cho p, do đó n' chỉ chia hết cho p^{k-1}. Từ lập luận này suy ra n'' chỉ chia hết cho p^{k-2} và các số $n, n', n'', \ldots, n^{(k)}$ là khác nhau. □

Hệ quả 1.2.1. *Số nguyên dương n không có ước chính phương nếu và chỉ nếu $(n, n') = 1$.*