ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THỊ DIỆU LINH

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ DOUGLAS-RACHFORD GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THỊ DIỆU LINH

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ DOUGLAS-RACHFORD GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, phó giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2016

Học viên

Dương Thị Diệu Linh

Danh sách ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}_{++}$	tập các số thực dương
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
$\mathcal{H}^*$	không gian liên hợp của $\mathcal{H}$
C	tập con lồi đóng của $\mathcal{H}$
EP(H)	bài toán cân bằng với song hàm H
EP(F, G)	bài toán cân bằng với hai song hàm F và G
S_H	tập nghiệm của bài toán cân bằng EP(H)
S_{F+G}	tập nghiệm của bài toán cân bằng EP(F, G)
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|\cdot\|$	chuẩn sinh bởi tích vô hướng
dom A	miền xác định của toán tử A
gra A	đồ thị của toán tử A
Fix T	tập các điểm bất động của toán tử T
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x
prox_f	toán tử gần kề của hàm f
sri C	phần trong tương đối của tập C
$\Gamma_0(\mathcal{H})$	họ tất cả các hàm lồi f nửa liên tục dưới từ $\mathcal{H}$ đến $(-\infty, +\infty]$

Mở đầu

Sự cân bằng thường được hiểu như là một trạng thái đồng đều nhau giữa những lực lượng đối lập hay những đối tượng có ảnh hưởng qua lại lẫn nhau. Thuật ngữ này được sử dụng rộng rãi trong khoa học và kỹ thuật như trong vật lý, hóa học, kỹ thuật,... Trong hóa học, cân bằng hóa học xảy ra khi tốc độ của phản ứng thuận bằng với tốc độ của phản ứng nghịch. Trong sinh học, cân bằng sinh thái là trạng thái ổn định tự nhiên của hệ sinh thái, hướng tới sự thích nghi cao nhất với điều kiện sống, trạng thái này xảy ra khi tương quan lực lượng giữa con mồi và thú săn mồi trong hệ sinh thái đó có tỷ lệ tương đồng với nhau.

Có nhiều bài toán liên quan đến sự cân bằng được nhìn nhận trong một thể thống nhất qua các mô hình toán học khác nhau của nó như bài toán điểm yên ngựa, bài toán điểm bất động Kakutani... Mô hình chung cho bài toán cân bằng đó là

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } (\forall y \in C)\ H(x, y) \geq 0,$$

trong đó C là tập con lồi đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, và song hàm $H\colon C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $H(x, x) = 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$ được gọi là song hàm cân bằng.

Bài toán này lần đầu được đưa ra vào năm 1955 bởi H. Nikaido, K. Isoda khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác và vào năm 1972 nó được xét đến dưới dạng một bất đẳng thức minimax bởi tác giả Ky Fan, người đã có nhiều đóng góp quan trọng cho bài toán nên bài toán được gọi là bất đẳng thức Ky Fan, tuy nhiên nó có tên gọi là bài toán cân bằng (equilibrium problem) theo cách gọi của các tác giả L. D. Muu và W. Oettli năm 1992, E. Blum và W. Oettli năm 1994. Bài toán cân bằng là một mô hình toán học thống nhất cho nhiều lớp bài toán quan trọng riêng lẻ. Vì vậy, các kết quả thu được về bài toán cân bằng được áp dụng trực tiếp cho các bài toán đặc biệt của nó, ngược lại, nhiều kết quả của mỗi bài toán riêng lẻ nói trên có thể mở rộng cho bài toán cân bằng với những điều chỉnh phù hợp nhờ đó nó có thể mang lại nhiều ứng dụng hơn.

Các hướng nghiên cứu thường được đặt ra đối với bài toán cân bằng là: nghiên cứu những vấn đề định tính như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định và nghiên cứu định lượng bao gồm xây dựng các thuật toán để giải, tốc độ hội tụ của các thuật toán và áp dụng bài toán này vào trong các bài toán thực tế. Trong các vấn đề nêu trên, thì việc nghiên cứu xây dựng các phương pháp giải chiếm một tỉ trọng lớn trong các hướng nghiên cứu về bài toán cân bằng. Tính đến nay, đã có nhiều kết quả đạt được cho một số lớp bài toán cân bằng lồi và đơn điệu, trong đó phải kể đến các phương pháp: phương pháp hàm đánh giá, phương pháp sử dụng nguyên lý bài toán phụ, phương pháp điểm gần kề, phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp điểm trong và các phương pháp chiếu.

Trong luận văn này tác giả trình bày phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng với tổng hai song hàm thỏa mãn những điều kiện chuẩn. Chứng minh rằng bài toán này tương đương với bài toán tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại tương ứng với điều kiện thích hợp. Thuật toán là hệ quả của phương pháp phân rã Douglas-Rachford ứng dụng cho bao hàm thức đơn điệu bổ trợ.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu về bài toán cân bằng và phương pháp phân rã Douglas-Rachford để giải bài toán cân bằng trong không gian Hilbert thực trên cơ sở bài báo [3] công bố năm 2012.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1: **Một số vấn đề cơ bản**. Tác giả nhắc lại một số kiến thức cơ bản nhất của giải tích hàm và giải tích lồi sẽ được sử dụng ở chương sau. Tiếp theo là giới thiệu về bài toán cân bằng, một số ví dụ và sự tồn tại nghiệm của bài toán này. Cuối cùng trình bày thuật toán Douglas-Rachford giải bài toán tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại và thuật toán phân rã song song giải bài toán tìm không điểm của tổng hữu hạn toán tử đơn điệu cực đại.

Chương 2: **Phương pháp phân rã Douglas-Rachford giải bài toán cân bằng**. Trong chương này, tác giả trình bày mối liên quan mật thiết giữa bao hàm thức đơn điệu và bài toán cân bằng. Đồng thời cũng trình bày về thuật toán và sự hội tụ của phương pháp phân rã Douglas-Rachford.

Mặc dù tác giả đã cố gắng hết sức thực hiện luận văn, nhưng với trình độ hạn chế cùng nhiều lý do khác, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong sự góp ý của các thầy cô, các bạn và các anh chị đồng nghiệp để luận văn này hoàn chỉnh hơn.

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Trong chương này, tác giả trình bày ba mục. Cụ thể đầu tiên nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết về không gian Hilbert thực. Tiếp theo tác giả giới thiệu bài toán cân bằng. Cuối cùng tác giả mô tả thuật toán Douglas-Rachford giải bài toán tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại tương ứng với điều kiện thích hợp. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [4].

1.1 Không gian Hilbert thực

Định nghĩa 1.1. Không gian tuyến tính $\mathcal{H}$ xác định trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *không gian tiền Hilbert* nếu trong đó xác định một hàm hai biến $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

i) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{H}$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{H};$

iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,\ \forall x, y, z \in \mathcal{H};$

vi) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{H},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Hàm $\langle \cdot, \cdot \rangle$ thỏa mãn bốn tính chất trên gọi là *tích vô hướng* trên $\mathcal{H}$ và $\langle x, y \rangle$ là *tích vô hướng của hai phần tử* x và y.

Nhận xét 1.1. Mọi không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn của $x \in \mathcal{H}$ xác định bởi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Định nghĩa 1.2. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. Trong $\mathbb{C}^n$, với $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, ta đặt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_n \eta_n,$$

Khi đó $\mathbb{C}^n$ là một không gian Hilbert.

Ví dụ 1.2. Trong không gian l_2, ta đưa vào tích vô hướng:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$$

$$(x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2,\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l_2).$$

Khi đó

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Không gian l_2 đầy đủ với chuẩn đó. Vậy l_2 là không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.3. Tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{H}$ gọi là *không gian liên hợp* (*không gian đối ngẫu* của $\mathcal{H}$) và ký hiệu là $\mathcal{H}^*$.

Định nghĩa 1.4. Cho không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, một hàm $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Khi đó

i) Một hàm f xác định trên tập $\mathcal{H}$ được gọi là *nửa liên tục dưới* tại điểm $x_0 \in \mathcal{H}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, với mọi x thuộc $\mathcal{H}$ thỏa mãn $\|x - x_0\| < \delta$.

ii) Hàm f được gọi là *nửa liên tục trên* trên $\mathcal{H}$ tại $x_0 \in \mathcal{H}$ nếu hàm $-f$