ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ MINH TUYÊN

MỘT SỐ DẠNG CHUẨN TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ẨN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ MINH TUYÊN

MỘT SỐ DẠNG CHUẨN TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ẨN

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **TS. TRỊNH THỊ DIỆP LINH**

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình trình bày của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo trung thực và sự chính xác.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Dương Thị Minh Tuyên

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Trịnh Thị Diệp Linh. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Cô về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo, bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THPT Yên Thủy A, Huyện Yên Thủy, Tỉnh Hoà Bình cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Dương Thị Minh Tuyên

Mục lục

Mở đầu

Phương trình vi phân không giải được đối với đạo hàm cấp cao (hay phương trình vi phân ẩn) xuất hiện khi toán học mô tả các hiện tượng tự nhiên. Chẳng hạn, phân tích trạng thái đặc trưng của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 trên mặt phẳng dạng hỗn hợp (xem [26], [18], [27]) hoặc nghiên cứu dáng điệu trường hướng của các đường tiệm cận trên bề mặt trơn trong không gian ba chiều (xem [8], [25], [12]).

Vấn đề nghiên cứu các phương trình vi phân ẩn bắt đầu được tuyên bố vào đầu năm 1885 bởi cuộc thi ở Thụy Điển do quốc vương Oscar đệ nhị đề xuất. Cuộc thi yêu cầu mô tả các đường cong, đưa đến các phương trình vi phân bao gồm không chỉ nghiên cứu dáng điệu đặc biệt của các đường cong pha của các trường véctơ, mà còn phân tích các nghiệm đặc biệt đưa đến các phương trình vi phân ẩn.

Từ vấn đề cần thiết phân tích dáng điệu nghiệm trơn của phương trình vi phân, có thể nhận được các dạng chuẩn tắc trơn của phương trình vi phân hay họ các đường cong pha với độ chính xác cho sự lựa chọn các nhóm được cải tiến. Đối với các trường véctơ trơn điển hình trên mặt phẳng, lý thuyết của các dạng chuẩn trơn đã hoàn thành chưa lâu khi nhận được các dạng chuẩn tắc quỹ đạo trơn đối với yên ngựa không cộng hưởng (xem [4]).

Trong quá trình nghiên cứu, tìm được các dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân không giải được đối với đạo hàm, kết quả cơ bản là phương trình điển hình trong lân cận của mỗi điểm kì dị, với điểm kì dị mà đường cong trơn biệt thức, đi đến dạng chuẩn $y = \left(\frac{dy}{dx} + kx\right)^2$ là phép vi đồng phôi của mặt phẳng (x, y) (với các đồng phôi có thể đạt được $k = 1, \frac{1}{9}$, hay $\frac{1}{4}$). Phương trình điển hình với hàm số trơn F có dạng

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

trong đó $p = \frac{dy}{dx}$, mặt trơn được xác định trong không gian ba chiều của các $1-$tia của các hàm số $y(x)$ (với các tọa độ x, y, p) bề mặt trơn. Mặt này sẽ gọi là *bề mặt* của phương trình (1). Ánh xạ gấp của phương trình (1) được gọi là *phép chiếu dọc theo trục p* lên mặt của phương trình (1) trên mặt phẳng (x, y). Điểm tới hạn của gấp gọi là *điểm kì dị* của phương trình, các điểm kì dị của phương trình tạo thành *criminant* của phương trình. Phép chiếu của criminant trên mặt phẳng (x, y) gọi là *biệt tuyến*. Mỗi điểm của criminant của phương trình có điểm tới hạn là *gấp* hoặc là *lùi Whitney* của gấp của phương trình (1).

Trong không gian của các $1-$tia xác định trường của các mặt phẳng tiếp xúc $dy = pdx$. Điểm kì dị của phương trình $F = 0$ gọi là *chính quy*, nếu thỏa mãn điều kiện của các criminant trơn trong điểm này

$$rank((x, y, p) \mapsto (F, F_p)) = 2$$

và criminant không tiếp xúc trong điểm này của mặt phẳng tiếp xúc.

Dạng chuẩn $p^2 = x$ của phương trình $F = 0$ trong lân cận của điểm kì dị chính quy của phương trình đã được tìm thấy, có lẽ là, đồng thời bởi Dara L. [15] và Bruce I. W., người mà đã sử dụng dạng $p^2 = xE(x, y)$, trong đó E là hàm số trơn, nhận bởi Thom R. [26].

Dara L. trong nghiên cứu của mình đã chỉ ra rằng, đối với hàm F từ tập mở trù mật hầu khắp trong không gian của các hàm số này với tôpô mịn C^3 Whitney phương trình $F = 0$ có thể có các điểm kì dị không chính quy chỉ của năm dạng : yên ngựa gấp tốt, điểm nút gấp tốt, tiêu điểm gấp tốt, nếp gấp elliptic, nếp gấp hyperbolic. Từ năm dạng điểm kì dị trên, ba dạng đầu được gọi là gấp tốt, còn hai dạng cuối gọi là các dạng đặc biệt. Ba dạng đầu được mô tả tương ứng trong Hình 1.8a-c.

Dara L. đã trình bày giả thuyết rằng, phương trình (1) địa phương trong lân cận của mỗi điểm kì dị gấp tốt của tôpô tương đương nhận được phương trình $y = \dfrac{p^2 + \chi x^2}{2}$ nếu $\chi < 0, 0 < \chi < \dfrac{1}{4}$, và $\chi > \dfrac{1}{4}$ tương ứng với yên ngựa, điểm nút, và tiêu điểm, phương trình $x = p^3 - yp$ trong trường hợp của nếp xếp elliptic, phương trình $x = p^3 + yp$ trong trường hợp của nếp xếp hyperbolic.

Nội dung của luận văn chủ yếu trình bày lại các kết quả của bài báo [14] và một số kiến thức liên quan trong tài liệu [12]. Ngoài phần mở đầu, kết luận, và tài liệu tham khảo luận văn được chia thành hai chương

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương 1 chúng tôi trình bày một vài ví dụ dẫn đến vấn đề nghiên cứu và các khái niệm cơ bản của hàm ẩn.

Chương 2. Một số dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân ẩn

Trong chương 2 chúng tôi trình bày một số định lý chính trên các dạng chuẩn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một vài ví dụ dẫn đến vấn đề nghiên cứu và định nghĩa các khái niệm cơ bản của lý thuyết các hàm ẩn.

1.1. Các điểm kì dị đơn giản

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y); \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.1}$$

Điểm (x_0, y_0) mà tại đó $P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0$ được gọi là *điểm cân bằng của hệ* (1.1) hoặc *điểm kì dị.*

Bây giờ ta xét hệ vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng bắt đầu từ hệ 2 phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y; \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ là các hằng số và $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Điểm $(0, 0)$ là điểm cân bằng của hệ (1.2). Ta hãy nghiên cứu đặc tính của các quỹ đạo đối với hệ (1.2) ở lân cận điểm đó. Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$x = a_1 e^{kt}, y = a_2 e^{kt}. \tag{1.3}$$