ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG ANH TUẤN

MỘT SỐ HỆ THỨC MỚI
TRONG DÃY FIBONACCI SUY RỘNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên – 2015

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Leonardo Pisano Bogollo (1170–1250), còn được biết đến với tên Leonardo của Pisa. Fibonacci là nhà toán học người Ý tài ba nhất thời Trung Cổ. Fibonacci đã có công giới thiệu hệ đếm Hindu – Ả Rập ở Châu Âu và đặc biệt nổi tiếng với dãy số mang tên Ông, dãy Fibonacci, vì Ông là người đầu tiên nghiên cứu dãy số này trong cuốn sách *Liber Abbaci* (sách về tính toán) xuất bản năm 1202. Dãy Fibonacci là một trong dãy số đẹp nhất trong toán học. Dãy Fibonacci xuất hiện trong nhiều lĩnh vực của tự nhiên, với rất nhiều tính chất đẹp và ứng dụng quan trọng. Một trong những phát triển quan trọng của dãy Fibonacci là dãy Lucas. Sau Fibonacci, rất nhiều các nhà khoa học nghiên cứu về dãy Fibonaci: Cassini (1625–1712), Catalan (1814–1894), Lucas (1842–1891), Binet (1857–1911), D’Ocagne (1862–1938),…Và rất nhiều hệ thức của dãy Fibonacci đã được mang tên các nhà khoa học này. Hiện nay, tài liệu bằng tiếng Việt về dãy Fibonacci, dãy Lucas và các ứng dụng chưa có nhiều, mặc dù đã có một vài luận văn về dãy Fibonacci, tuy nhiên vẫn còn nhiều vấn đề thú vị của dãy Fibonacci và dãy Fibonacci suy rộng chưa được đề cập. Vì vậy việc nghiên cứu và phổ biến các kiến thức về đề tài này, theo chúng tôi là thú vị và cần thiết.

2. Mục đích nghiên cứu

Tập hợp và chứng minh các hệ thức mới cho dãy Fibonacci và dãy Fibonacci suy rộng.

3. Bố cục của luận văn

Luận văn *Một số hệ thức mới trong dãy Fibonacci suy rộng* gồm hai chương.

Chương 1 Dãy Fibonacci suy rộng

Chương 1 trình bày một số kiến thức của dãy Fibonacci, dãy Fibonacci suy rộng và một số dãy số liên quan.

Chương 2 Một số hệ thức mới trong dãy Fibonacci suy rộng

Chương 2 tập hợp và chứng minh các hệ thức mới cho dãy Fibonacci và dãy Fibonacci suy rộng.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN *http://www.lrc.tnu.edu.vn*

Chương I

DÃY FIBONACCI SUY RỘNG

1.1 Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Dãy Fibonacci và các dãy Fibonacci suy rộng thực chất chỉ là các phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất. Vì vậy, mục này trình bày công thức nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất trong trường hợp hai nghiệm của phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt. Kiến thức này là đủ để áp dụng vào dãy Fibonacci và các dãy Fibonacci suy rộng.

1.1.1 Định nghĩa

Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là phương trình có dạng

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = 0,\ n = 1, 2, ..., \tag{1.1.1}$$

trong đó $A \neq 0,\ B,\ C$ là những hằng số.

1.1.2 Công thức nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Phương trình (1.1.1) có phương trình đặc trưng là

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \tag{1.1.2}$$

Mệnh đề 1.1 *Giả sử phương trình (1.1.2) có hai nghiệm α và β phân biệt. Khi đó phương trình (1.1.1) có nghiệm là*

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \tag{1.1.3}$$

trong đó C_1 và C_2 là những số bất kì, được gọi là *các hằng số tự do*.

Chứng minh. Vì α và β là hai nghiệm của phương trình (1.1.2) nên

$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ và $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0.$

Thay (1.1.3) vào phương trình (1.1.1) ta được:

$$\begin{aligned} Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} &= A\left(C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}\right) + B\left(C_1\alpha^n + C_2\beta^n\right) + C\left(C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}\right) \\ &= C_1\alpha^{n-1}\left(A\alpha^2 + B\alpha + C\right) + C_2\beta^{n-1}\left(A\beta^2 + B\beta + C\right) = 0 \ \forall C_1, C_2. \end{aligned}$$

Vậy (1.1.3) là nghiệm của phương trình (1.1.1).

Nếu biết điều kiện ban đầu u_0 và u_1 thì ta có thể tìm được hai hằng số tự do C_1 và C_2, khi ấy nghiệm hoàn toàn được xác định.

Ví dụ1.1. Tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$u_{n+1} = 3u_n + 28u_{n-1} \qquad (1.1.4)$$

với điều kiện ban đầu $u_0 = 7,\ u_1 = -6.$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình (1.1.4) là

$$\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7, \beta = -4.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1.1.4) là

$$u_n = C_1.7^n + C_2(-4)^n.$$

Với $n = 0$ ta có $u_0 = C_1 + C_2$ hay $C_1 + C_2 = 7.$

Với $n = 1$ ta có $u_1 = C_1.7 + C_2.(-4)$ hay $7C_1 - 4C_2 = -6.$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ 7C_1 - 4C_2 = -6 \end{cases}$

ta được $C_1 = 2;\ C_2 = 5.$

Vậy nghiệm của phương trình (1.1.4) với điều kiện ban đầu $u_0 = 7,\ u_1 = -6$ là

$$u_n = 2.7^n + 5.\ -4\ ^n.$$

1.2 Các phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất đặc biệt

1.2.1 Dãy Fibonacci

1.2.1.1 Định nghĩa *Dãy Fibonacci* là dãy cho bởi phương trình sai phân tuyến tính cấp hai

$$u_{n+1} - u_n - u_{n-1} = 0,\ n = 1,2,..., \qquad (1.2.1)$$

với điều kiện ban đầu $u_0 = 0,\ u_1 = 1$.

Công thức (1.2.1) còn có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n = 1,2,..., \\ u_0 = 0,\ u_1 = 1. \end{cases}$$

1.2.1.2 Công thức số hạng tổng quát của dãy Fibonacci

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ của (1.2.1) có nghiệm là

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1.2.1) là

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,$$

trong đó C_1 và C_2 là những hằng số tự do.

Với $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \\ C_2 = -\dfrac{1}{\alpha - \beta} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy Fibonacci có công thức là

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN *http://www.lrc.tnu.edu.vn*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Ta sẽ chứng minh $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$

Thật vậy, với $n=1$ và $n=2$ ta có:

$$u_1 = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,\ u_2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\ \ \alpha+\beta\ \ = 1.$$

Với $n \geq 3,$ theo định nghĩa dãy Fibonacci và theo qui nạp ta có

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} = \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{n-2}\ \ \alpha+1}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n-2}\ \ \beta+1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\alpha^{n-2}\alpha^2}{\sqrt{5}} - \frac{\beta^{n-2}\beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Như vậy, dãy u_n cũng chính là dãy Fibonacci F_n thỏa mãn $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ và

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},$$

trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình bậc hai $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$

Để tôn vinh Fibonacci, người ta thường kí hiệu dãy Fibonacci dưới dạng dãy F_n .Từ nay về sau ta cũng sử dụng kí hiệu F_n cho dãy Fibonacci.

1.2.2 Dãy Lucas

1.2.2.1 Định nghĩa *Dãy Lucas* là dãy được cho bởi phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$u_{n+1} - u_n - u_{n-1} = 0,\ n = 1,2,..., \tag{1.2.2}$$

với điều kiện ban đầu $u_0 = 2,\ u_1 = 1.$

Như vậy, dãy Lucas cũng có phương trình đặc trưng là $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$ hoàn toàn trùng với phương trình đặc trưng của dãy Fibonacci. Hai dãy số này chỉ khác nhau ở điều kiện ban đầu.

1.2.2.2 Công thức số hạng tổng quát của dãy Lucas

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1.2.2) là

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,$$

trong đó C_1 và C_2 là những hằng số tự do.

Với $u_0 = 2,\ u_1 = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 1.$$

Vậy công thức tổng quát của dãy Lucas là $u_n = \alpha^n + \beta^n.$

Kí hiệu L_n là dãy Lucas. Khi ấy, số hạng tổng quát của dãy Lucas là $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ và $L_n = \alpha^n + \beta^n,$ trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$

1.2.3 Dãy Jacobsthal

1.2.3.1 Định nghĩa *Dãy Jacobsthal* là dãy được cho bởi phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1},\ n = 1,2,..., \\ u_0 = 0,\ u_1 = 1. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

1.2.3.2 Công thức nghiệm tổng quát của dãy Jacobsthal

Phương trình đặc trưng của (1.2.3) là $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$

Phương trình đặc trưng có nghiệm là $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2.$

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1.2.3) là

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n.$$

Với $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\alpha + C_2\beta_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{3},\ C_2 = \frac{1}{3}.$$

Vậy công thức tổng quát của dãy Jacobsthal là $u_n = \dfrac{-1}{3}\ \alpha^n - \beta^n$.

Kí hiệu J_n là dãy Jacobsthal. Khi ấy, số hạng tổng quát của dãy Jacobsthal là $J_0 = 0,\ J_1 = 1$ và $J_n = \dfrac{-1}{3}\ \alpha^n - \beta^n$, trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$

1.2.4 Dãy $k-$ Fibonacci

1.2.4.1 Định nghĩa *Dãy $k-$ Fibonacci* là dãy được cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_{n+1} = kF_n + F_{n-1},\ n = 1,2,..., \\ F_0 = 0,\ F_1 = 1. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

1.2.4.2 Công thức tổng quát của dãy $k-$ Fibonacci

Phương trình (1.2.4) có phương trình đặc trưng là $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0.$

Phương trình đặc trưng có nghiệm là $\alpha = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2},\ \beta = \dfrac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}.$

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1.2.4) là

$$F_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n.$$

Với $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\ .$$

Vậy $F_n = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\ \alpha^n - \beta^n$, trong đó α_1, β là nghiệm của phương trình $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0.$ Với $k = 1$ ta trở về dãy Fibonacci.

1.2.5 Dãy $k-$ Lucas

1.2.5.1 Định nghĩa *Dãy $k-$ Lucas* là dãy đuợc cho bởi hệ tthức truy hồi

$$\begin{cases} L_{n+1} = kL_n + L_{n-1},\ n = 1,2,..., \\ L_0 = 2, L_1 = k. \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

1.2.5.2. Công thức hệ số tổng quát của dãy $k-$ Lucas

Phương trình đặc trưng của (1.2.5) là $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0.$

Phương trình đặc trưng có nghiệm là

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}.$$

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1.2.5) là

$$L_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n.$$

Với $L_0 = 2,\ L_1 = k$ ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1\alpha + C_2\beta = k \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 1.$$

Vậy $L_n = \alpha^n + \beta^n$, trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm của phương trình $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0.$

Với $k = 1$ ta trở về dãy Lucas.

1.2.6 Dãy $k-$ Jacobsthal

1.2.6.1 Định nghĩa *Dãy $k-$ Jacobsthal* là dãy được cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} J_{n+1} = kJ_n + 2J_{n-1},\ n = 1,2,..., \\ J_0 = 0,\ J_1 = 1. \end{cases} \qquad (1.2.6)$$