ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
* * * * * * * * * * * * * * * *

HOÀNG THỊ NGÂN

VỀ VAI TRÒ CỦA TOÁN TỬ CHIẾU TRONG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
* * * * * * * * * * * * * * * *

HOÀNG THỊ NGÂN

VỀ VAI TRÒ CỦA TOÁN TỬ CHIẾU TRONG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - năm 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan toàn bộ nội dung luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được tổng hợp từ các tài liệu tham khảo. Các kết quả trình bày trong luận văn hoàn toàn trung thực, không sao chép, trùng lặp với bất kì tài liệu nào khác.

Học viên

Hoàng Thị Ngân

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm Thái Nguyên. Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới GS.TSKH Lê Dũng Mưu, thầy là người trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy, cô giáo trong khoa Toán, các bạn học viên lớp Cao học Toán K21B đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Qua đây tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới người thân trong trong gia đình, bạn bè đã luôn động viên, khích lệ tôi trong suốt quá trình hoàn thành khoá học.

Mặc dù có nhiều có gắng nhưng luận văn này vẫn không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 14 tháng 03 năm 2015

Học viên

Hoàng Thị Ngân

Mục lục

Mở đầu

Toán tử chiếu lên một tập lồi đóng là một lớp ánh xạ quan trọng trong giải tích, đặc biệt là giải tích ứng dụng.. Trong không gian Hilbert thực toán tử này luôn tồn tại và có nhiều tính chất đặc thù có thể khai thác để nghiên cứu và giải quyết nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau như trong: Lý thuyết tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng.

Bài toán bất đẳng thức biến phân là một lớp bài toán quan trọng có nhiều ứng dụng trong phương trình đạo hàm, các bài toán vật lý và kĩ thuật cũng như trong tối ưu hoá. Các hướng nghiên cứu chính trong bài toán bất đẳng thức biến phân là sự tồn tại nghiệm và phương pháp giải, trong đó phương pháp dựa vào toán tử chiếu và các định lý điểm bất động thường được sử dụng, được trích dẫn chủ yếu trong các tài liệu [7], [9] .

Bản luận văn này nhằm mục đích giới thiệu vai trò của toán tử chiếu trong không gian Hilbert và việc áp dụng lớp bài toán này vào bất đẳng biến phân. Cụ thể:

1. Sử dụng toán tử chiếu kết hợp với Định lý điểm bất động Brouwer để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

2. Giới thiệu hai phương pháp dựa vào toán tử chiếu để giải bài toán bất đẳng thức biến phân, đó là phương pháp chiếu cơ bản giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh có tính Lipschitz và phương pháp chiếu tăng cường (chiếu hai lần) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu.

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, ta sẽ nhắc lại một số kiến thức quan trọng làm nền tảng để nghiên cứu chương sau đó là các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và giải tích lồi. Các nội dung trong chương được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [1], [2], [3].

1.1. Các kiến thức về không gian Hilbert

1.1.1. Tích vô hướng

Định nghĩa 1.1.1. *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Tích vô hướng trên $\mathcal{H}$ là một ánh xạ xác định như sau:*

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

thoả mãn các điều kiện sau đây:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}, \langle x, x \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$.
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathcal{H}$.

4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R}.$

$\langle x, y\rangle$ *được gọi là tích vô hướng của hai vectơ* x *và* y *trên* $\mathcal{H}$*.*

1.1.2. Không gian tiền Hilbert

Định nghĩa 1.1.2. *Cặp* $(\mathcal{H}, \langle ., .\rangle)$*, trong đó* $\mathcal{H}$ *là một không gian vectơ trên trường số thực* $\mathbb{R}$*,* $\langle .,.\rangle$ *là một tích vô hướng trên* $\mathcal{H}$ *được gọi là* không gian tiền Hilbert *(hay còn gọi là* không gian Unita*).*

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức Cauchy- Schwartz)**.** *Trong không gian tiền Hilbert* $\mathcal{H}$*, với mọi* $x, y \in \mathcal{H}$ *ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1.1}$$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Mối quan hệ giữa chuẩn và tích vô hướng được thể hiển qua định lí sau.

Định lý 1.2. *Mọi không gian tiền Hilbert* $\mathcal{H}$ *đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng. Theo định lý trên, không gian tiền Hilbert là không gian tuyến tính định chuẩn, có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

1.1.3. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.3. *Nếu* $\mathcal{H}$ *là một không gian tiền Hilbert và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng thì được gọi là không gian Hilbert.*

Ví dụ 1.1.

1. Không gian $\mathbb{R}^n$ *là không gian Hilbert thực với tích vô hướng*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

trong đó $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
và chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng

$$\|x\| = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |x|^2.$$

2. Không gian

$$l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_n \in \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{n} |x|^2 < +\infty \right\}$$

là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x|^2}$$

với $x, y \in l^2, x = (x_n)$, $y = (y_n), n \in \mathbb{N}$.

Như vậy ta có không gian Hilbert là một không gian Banach. Do đó các không gian này có các tính chất của một không gian định chuẩn và có thêm một số tính chất mới sau đây.

Định lý 1.3. *Giả sử* $\mathcal{H}$ *là một không gian tiền Hilbert. Khi đó tích vô hướng là một hàm số liên tục trên* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Định lý 1.4. *Với mọi* x, y *thuộc không gian tiền Hilbert* $\mathcal{H}$ *ta luôn có đẳng thức hình bình hành sau:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1.3}$$